

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## DIPLOMSKI RAD

Boris Kosanović

ZAGREB, 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## DIPLOMSKI RAD

Mentor:

prof. dr. sc. Josip Kasać

Student:

Boris Kosanović

ZAGREB, 2018.

*Ovim putem zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc. Josipu Kasaću na korisnim savjetima i pružanoj podršci tijekom izrade i pisanja ovog rada.*

*Isto tako, zahvalio bih se majci Ljiljani, ocu Dušku, bratu Nikoli, djevojci Heleni, obitelji, prijateljima, prijateljicama i kolegama na moralnoj podršci tijekom cijelog dosadašnjeg studija pa tako i tijekom izrade ovog diplomskog rada.*

## **Izjava**

Izjavljujem da sam ovaj rad radio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zagreb, prosinac 2018.

Boris Kosanović





SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske radove studija strojarstva za smjerove:  
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment,  
inženjerstvo materijala te mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum:	Prilog:
Klasa:	
Ur. broj:	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **BORIS KOSANOVIĆ**

Mat. br.: 0035190473

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Estimacija i kompenzacija vanjskih poremećaja kod autonomnih letjelica**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Estimation and compensation of external disturbances of unmanned aerial vehicles**

### Opis zadatka:

Jedan od ključnih problema prilikom upravljanja autonomnim letjelicama je prisutnost nepoznatih vanjskih poremećaja poput vjetra. Stoga je neophodno konvencionalne regulatore integrirati s estimatorima vanjskih poremećaja s ciljem njihove kompenzacije. Kod kvadrokoptera je posebno zahtjevna kompenzacija udara vjetra u horizontalnoj ravnini zbog nemogućnosti direktne kompenzacije preko sila potiska rotora. U ovom radu razmatraju se performanse različitih estimatora poremećaja na primjeru estimacije sile udara vjetra kod kvadrokoptera.

U radu je potrebno:

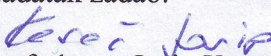
1. Implementirati konvencionalni observer poremećaja, observer poremećaja s proširenim stanjem, te robusni observer poremećaja.
2. Ilustrirati performanse observera na jednostavnim primjerima estimacije poremećaja dinamičkih sustava drugog i trećeg reda.
3. Izvesti i implementirati dinamički model kvadrokoptera te provesti sintezu regulatora za problem slijeđenja proizvoljne referentne trajektorije.
4. Primijeniti observe poremećaja za estimaciju i kompenzaciju sila udara vjetra kod kvadrokoptera.
5. Provesti komparativnu analizu performansi observera poremećaja.
6. Zaključak.

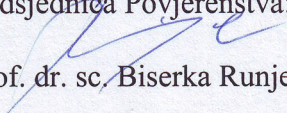
U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:  
27. rujna 2018.

Rok predaje rada:  
29. studenog 2018.

Predviđeni datum obrane:  
05. prosinca 2018.  
06. prosinca 2018.  
07. prosinca 2018.

Zadatak zadao:  
  
prof. dr. sc. Josip Kasać

Predsjednica Povjerenstva:  
  
prof. dr. sc. Biserka Runje



# Sadržaj

Sadržaj	v
Popis slika	vii
Popis oznaka	ix
Sažetak	xiv
Summary	xv
<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2. Observer stanja i poremećaja</b>	<b>3</b>
2.1. Observer poremećaja u vremenskoj domeni . . . . .	3
2.2. Observer s proširenim prostorom stanja . . . . .	7
2.3. Robusni estimator poremećaja . . . . .	11
<b>3. Matematički model kvadkoptera</b>	<b>14</b>
3.1. Osnovni koncepti . . . . .	14
3.2. Kinematika . . . . .	18
3.3. Dinamika . . . . .	22
3.4. Newton-Euler-ov model . . . . .	24
3.5. Linearizacija modela . . . . .	31

<b>4. Upravljanje s kompenzacijom poremećaja</b>	<b>33</b>
4.1. Observer poremećaja u vremenskoj domeni . . . . .	35
4.1.1. Podsustav za estimaciju poremećaja . . . . .	35
4.1.2. Podsustav za kompenzaciju poremećaja . . . . .	36
4.1.3. Primjeri za observer poremećaja u vremenskoj domeni . . . . .	37
4.2. Observer poremećaja s proširenim prostorom stanja . . . . .	43
4.2.1. Definiranje sustava . . . . .	43
4.2.2. Primjeri za observer poremećaja s proširenim prostorom stanja . .	45
4.3. Robusni estimator poremećaja . . . . .	50
4.3.1. Sustavi za estimaciju poremećaja $\mathbf{d}_2$ . . . . .	50
4.3.2. Sustavi za estimaciju poremećaja $\mathbf{d}_1$ . . . . .	51
4.3.3. Primjeri za robusni estimator poremećaja . . . . .	53
4.4. Komparativna analiza . . . . .	58
<b>5. Zaključak</b>	<b>60</b>
<b>Literatura</b>	<b>61</b>
<b>A. Prilog</b>	<b>63</b>

# Popis slika

2.1	Blok dijagram observera poremećaja u vremenskoj domeni za linearne sustave. . . . .	4
2.2	Odzivi estimatora poremećaja za dani primjer. . . . .	6
2.3	Blok dijagram observera s proširenim prostorom stanja za linearni sustav. . . . .	9
2.4	Odzivi varijabli stanja i estimirani poremećaj. . . . .	11
2.5	Odziv danog sustava s robusnim estimatorom poremećaja. . . . .	13
3.1	Pojednostavljeni kvadkopter u stanju lebdenja. . . . .	15
3.2	Pokret uzdizanja. . . . .	16
3.3	Pokret valjanja. . . . .	16
3.4	Pokret poniranja. . . . .	17
3.5	Pokret skretanja. . . . .	18
3.6	Koordinatni sustavi kvadkoptera. . . . .	19
4.1	Praćenje referentne trajektorije bez prisustva poremećaja. . . . .	38
4.2	Praćenje referentne trajektorije s poremećajem bez kompenzacije poremećaja. . . . .	39
4.3	Praćenje referentne trajektorije s poremećajem i kompenzacijom poremećaja. . . . .	40
4.4	Praćenje referentne trajektorije s poremećajem i kompenzacijom poremećaja uz šum mjerenja. . . . .	41
4.5	Praćenje referentne trajektorije s poremećajem i kompenzacijom poremećaja uz šum mjerenja s filtriranom upravljačkom varijablom. . . . .	42
4.6	Praćenje referentne trajektorije bez prisustva poremećaja. . . . .	45



4.7	Praćenje referentne trajektorije s poremećajem bez kompenzacije poremećaja. . . . .	46
4.8	Praćenje referentne trajektorije s poremećajem i kompenzacijom poremećaja. . . . .	47
4.9	Praćenje referentne trajektorije s poremećajem i kompenzacijom poremećaja uz šum mjerenja. . . . .	48
4.10	Praćenje referentne trajektorije s poremećajem i kompenzacijom poremećaja uz šum mjerenja s filtriranom upravljačkom varijablom. . . . .	49
4.11	Praćenje referentne trajektorije bez prisustva poremećaja. . . . .	53
4.12	Praćenje referentne trajektorije s poremećajem bez kompenzacije poremećaja. . . . .	54
4.13	Praćenje referentne trajektorije s poremećajem i kompenzacijom poremećaja. . . . .	55
4.14	Praćenje referentne trajektorije s poremećajem i kompenzacijom poremećaja uz šum mjerenja. . . . .	56
4.15	Praćenje referentne trajektorije s poremećajem i kompenzacijom poremećaja uz šum mjerenja s filtriranom upravljačkom varijablom. . . . .	57
4.16	Pogreške praćenja i upravljačke varijable observera stanja. . . . .	58

# Popis oznaka

$F_x$	Sila tijela u smjeru $x_B$ s obzirom na koordinatni sustav tijela [N] . . . . .	24
$F_y$	Sila tijela u smjeru $y_B$ s obzirom na koordinatni sustav tijela [N] . . . . .	24
$F_z$	Sila tijela u smjeru $z_B$ s obzirom na koordinatni sustav tijela [N] . . . . .	24
$I_{XX}$	Moment inercije oko $x$ -osi [ $\text{m}^4$ ] . . . . .	31
$I_{YY}$	Moment inercije oko $y$ -osi [ $\text{m}^4$ ] . . . . .	31
$I_{ZZ}$	Moment inercije oko $z$ -osi [ $\text{m}^4$ ] . . . . .	31
$J_{TP}$	Okretni moment inercije propelera [ $\text{N m s}^2$ ] . . . . .	26
$K_i$	Pojačanja . . . . .	34
$U_1$	Vertikalni potisak s obzirom na koordinatni sustav tijela [N] . . . . .	16
$U_2$	Moment valjanja s obzirom na koordinatni sustav tijela [N m] . . . . .	16
$U_3$	Moment poniranja s obzirom na koordinatni sustav tijela [N m] . . . . .	17
$U_4$	Moment skretanja s obzirom na koordinatni sustav tijela [N m] . . . . .	18
$X$	Linearni položaj tijela u smjeru $x_E$ s obzirom na koordinatni sustav Zemlje [m] 19	
$Y$	Linearni položaj tijela u smjeru $y_E$ s obzirom na koordinatni sustav Zemlje [m] 19	
$Z$	Linearni položaj tijela u smjeru $z_E$ s obzirom na koordinatni sustav Zemlje [m] 19	
$\Omega$	Brzina propelera [ $\text{rad s}^{-1}$ ] . . . . .	26
$\Omega_1$	Brzina prednjeg propelera [ $\text{rad s}^{-1}$ ] . . . . .	26
$\Omega_2$	Brzina desnog propelera [ $\text{rad s}^{-1}$ ] . . . . .	26
$\Omega_3$	Brzina stražnjeg propelera [ $\text{rad s}^{-1}$ ] . . . . .	26

$\Omega_4$	Brzina lijevog propelera [rad s <sup>-1</sup> ] . . . . .	26
$\Omega_H$	Brzina vrtnje propelera [rad s <sup>-1</sup> ] . . . . .	15
$\beta_i$	Pojačanja observera . . . . .	8
$\Gamma^E$	Brzina vrtnje propelera u odnosu na koordinatni sustav Zemlje [m] . . . . .	19
$\Lambda$	Općeniti vektor sile . . . . .	24
$\Omega$	Vektor brzina propelera [rad s <sup>-1</sup> ] . . . . .	26
$\Theta^E$	Brzina vrtnje propelera u odnosu na koordinatni sustav Zemlje [rad] . . . . .	19
$\ddot{\Gamma}^E$	Vektor linearnog ubrzanja s obzirom na koordinatni sustav Zemlje [m s <sup>-2</sup> ] . . . . .	23
$\ddot{\Theta}^E$	Vektor kutnog ubrzanja s obzirom na koordinatni sustav Zemlje [rad s <sup>-2</sup> ] . . . . .	23
$\dot{\Gamma}^E$	Vektor linearne brzine u odnosu na koordinatni sustav Zemlje [m s <sup>-1</sup> ] . . . . .	21
$\dot{\Theta}^E$	Vektor kutne brzine u odnosu na koordinatni sustav Zemlje [rad s <sup>-1</sup> ] . . . . .	21
$\dot{\nu}$	Vektor općenitog ubrzanja s obzirom na koordinatni sustav tijela . . . . .	24
$\dot{\omega}^B$	Vektor kutnog ubrzanja s obzirom na koordinatni sustav tijela [rad s <sup>-2</sup> ] . . . . .	23
$\dot{\xi}$	Vektor općenite brzine s obzirom na koordinatni sustav Zemlje [rad s <sup>-1</sup> ] . . . . .	22
$\dot{\zeta}$	Vektor općenitog ubrzanja s obzirom na hibridni koordinatni sustav . . . . .	28
$\dot{z}$	Derivacija unutarnjeg vektora stanja observera . . . . .	36
$\nu$	Vektor općenite brzine s obzirom na koordinatni sustav tijela . . . . .	21
$\omega^B$	Vektor kutne brzine u odnosu na koordinatni sustav tijela [rad s <sup>-1</sup> ] . . . . .	19
$\tau^B$	Vektor momenata u odnosu na koordinatni sustav tijela [N m] . . . . .	19
$\tau^E$	Vektor momenata s obzirom na koordinatni sustav Zemlje [N m] . . . . .	23
$\xi$	Vektor općenitog položaja s obzirom na koordinatni sustav Zemlje . . . . .	21
$\zeta$	Vektor općenite brzine s obzirom na hibridni koordinatni sustav . . . . .	28
$A$	Matrica koeficijenata sustava . . . . .	3
$B_d$	Matrica poremećaja . . . . .	3
$B_u$	Matrica ulaza sustava . . . . .	3
$C$	Matrica izlaza sustava . . . . .	3
$C_B$	Coriolis-ova centripetalna matrica s obzirom na koordinatni sustav tijela . . . . .	24
$C_H$	Coriolis-ova centripetalna matrica s obzirom na hibridni koordinatni sustav . . . . .	28
$E_B$	Matrica pokreta . . . . .	27
$F^B$	Vektor sile u odnosu na koordinatni sustav tijela [N] . . . . .	19
$F^E$	Vektor sila s obzirom na koordinatni sustav Zemlje [N] . . . . .	23
$F_G^B$	Vektor gravitacijske sile s obzirom na koordinatni sustav tijela [N] . . . . .	25

$\mathbf{F}_G^E$	Vektor gravitacijske sile s obzirom na koordinatni sustav Zemlje [N] . . . . .	25
$\mathbf{G}_B(\boldsymbol{\xi})$	Gravitacijski vektor s obzirom na koordinatni sustav tijela . . . . .	25
$\mathbf{G}_H(\boldsymbol{\xi})$	Gravitacijski vektor s obzirom na hibridni koordinatni sustav . . . . .	28
$\mathbf{I}$	Inercijska matrica tijela [N m s <sup>2</sup> ] . . . . .	23
$\mathbf{J}_\Theta$	Općenita matrica . . . . .	22
$\mathbf{L}$	Matrica pojačanja observera . . . . .	3
$\mathbf{M}_B$	Inercijska matrica sustava . . . . .	24
$\mathbf{M}_H$	Inercijska matrica sustava s obzirom na hibridni koordinatni sustav . . . . .	28
$\mathbf{O}_B(\boldsymbol{\nu})$	Matrica žiroskopskih efekata s obzirom na koordinatni sustav Zemlje [N] .	26
$\mathbf{O}_H(\boldsymbol{\nu})$	Matrica žiroskopskih efekata s obzirom na hibridni koordinatni sustav [N] .	28
$\mathbf{R}_\Theta$	Rotacijska matrica . . . . .	20
$\mathbf{R}(\phi, x)$	Rotacijska matrica oko x osi . . . . .	20
$\mathbf{R}(\psi, z)$	Rotacijska matrica oko z osi . . . . .	20
$\mathbf{R}(\theta, y)$	Rotacijska matrica oko y osi . . . . .	20
$\mathbf{T}_\Theta$	Matrica transformacije . . . . .	21
$\mathbf{U}_B(\boldsymbol{\Omega})$	Vektor pokreta . . . . .	27
$\mathbf{V}^B$	Vektor linearne brzine u odnosu na koordinatni sustav tijela [m s <sup>-1</sup> ] . . . .	19
$\mathbf{V}^E$	Vektor linearne brzine u odnosu na koordinatni sustav Zemlje [m s <sup>-1</sup> ] . . . .	21
$\dot{\mathbf{R}}_\Theta$	Derivacija rotacijske matrice . . . . .	23
$\dot{\mathbf{V}}^B$	Vektor linearnog ubrzanja s obzirom na koordinatni sustav tijela [m s <sup>-2</sup> ] . .	23
$\mathbf{d}$	Vektor poremećaja . . . . .	3
$\mathbf{e}_d$	Pogreška estimacije poremećaja . . . . .	4
$\mathbf{u}$	Vektor ulaza . . . . .	3
$\mathbf{x}$	Vektor stanja . . . . .	3
$\mathbf{y}$	Vektor izlaza . . . . .	3
$\mathbf{z}$	Unutarnji vektor stanja observera . . . . .	3
$\ddot{\mathbf{X}}$	Linearno ubrzanje tijela u smjeru $x_E$ s obzirom na koordinatni sustav Zemlje [m s <sup>-2</sup> ] . . . . .	30
$\ddot{\mathbf{Y}}$	Linearno ubrzanje tijela u smjeru $y_E$ s obzirom na koordinatni sustav Zemlje [m s <sup>-2</sup> ] . . . . .	30
$\ddot{\mathbf{Z}}$	Linearno ubrzanje tijela u smjeru $z_E$ s obzirom na koordinatni sustav Zemlje [m s <sup>-2</sup> ] . . . . .	30

$\ddot{\phi}$	Kutno ubrzanje tijela oko $x_2$ s obzirom na koordinatni sustav Zemlje [rad s <sup>-2</sup> ] 31
$\ddot{\psi}$	Kutno ubrzanje tijela oko $z_E$ s obzirom na koordinatni sustav Zemlje [rad s <sup>-2</sup> ] 31
$\ddot{\theta}$	Kutno ubrzanje tijela oko $y_2$ s obzirom na koordinatni sustav Zemlje [rad s <sup>-2</sup> ] 31
$\dot{X}$	Linearna brzina tijela u smjeru $x_E$ s obzirom na koordinatni sustav Zemlje [m s <sup>-1</sup> ] . . . . . 28
$\dot{Y}$	Linearna brzina tijela u smjeru $y_E$ s obzirom na koordinatni sustav Zemlje [m s <sup>-1</sup> ] . . . . . 28
$\dot{Z}$	Linearna brzina tijela u smjeru $z_E$ s obzirom na koordinatni sustav Zemlje [m s <sup>-1</sup> ] . . . . . 28
$\dot{\phi}$	Kutna brzina tijela oko $x_2$ s obzirom na koordinatni sustav Zemlje [rad s <sup>-2</sup> ] 31
$\dot{\psi}$	Kutna brzina tijela oko $z_E$ s obzirom na koordinatni sustav Zemlje [rad s <sup>-2</sup> ] 31
$\dot{\theta}$	Kutna brzina tijela oko $y_2$ s obzirom na koordinatni sustav Zemlje [rad s <sup>-2</sup> ] 31
$\dot{p}$	Kutno ubrzanje tijela oko $x_B$ s obzirom na koordinatni sustav tijela [rad s <sup>-2</sup> ] 28
$\dot{q}$	Kutno ubrzanje tijela oko $y_B$ s obzirom na koordinatni sustav tijela [rad s <sup>-2</sup> ] 28
$\dot{r}$	Kutno ubrzanje tijela oko $z_B$ s obzirom na koordinatni sustav tijela [rad s <sup>-2</sup> ] 28
$\dot{u}$	Linearno ubrzanje tijela u smjeru $x_B$ s obzirom na koordinatni sustav tijela [m s <sup>-2</sup> ] . . . . . 28
$\dot{v}$	Linearno ubrzanje tijela u smjeru $y_B$ s obzirom na koordinatni sustav tijela [m s <sup>-2</sup> ] . . . . . 28
$\dot{w}$	Linearno ubrzanje tijela u smjeru $z_B$ s obzirom na koordinatni sustav tijela [m s <sup>-2</sup> ] . . . . . 28
$\hat{\mathbf{d}}$	Vektor estimiranog poremećaja . . . . . 3
$\lambda_i$	Svojstvene vrijednosti . . . . . 5
$\phi$	Kutni položaj tijela oko $x_2$ s obzirom na koordinatni sustav Zemlje [rad] . . 20
$\psi$	Kutni položaj tijela oko $z_E$ s obzirom na koordinatni sustav Zemlje [rad] . . 20
$\tau_x$	Moment tijela oko $x_B$ s obzirom na koordinatni sustav tijela [N m] . . . . . 24
$\tau_y$	Moment tijela oko $y_B$ s obzirom na koordinatni sustav tijela [N m] . . . . . 24
$\tau_z$	Moment tijela oko $z_B$ s obzirom na koordinatni sustav tijela [N m] . . . . . 24
$\theta$	Kutni položaj tijela oko $y_2$ s obzirom na koordinatni sustav Zemlje [rad] . . 20
$\tilde{x}$	Greška slijeđenja položaja [m] . . . . . 33
$b$	Faktor potiska [N s <sup>2</sup> ] . . . . . 27
$b$	Parametar sustava . . . . . 6



$d$	Faktor prigušenja $[\text{N m s}^2]$ . . . . .	27
$d$	Poremećaj . . . . .	6
$e_i$	Estimacijska pogreška . . . . .	8
$g$	Ubrzanje sile teže $[\text{m s}^{-2}]$ . . . . .	25
$l$	Duljina $[\text{m}]$ . . . . .	27
$m$	Masa $[\text{kg}]$ . . . . .	23
$p$	Kutna brzina tijela oko $x_B$ s obzirom na koordinatni sustav tijela $[\text{rad s}^{-1}]$ .	21
$q$	Kutna brzina tijela oko $y_B$ s obzirom na koordinatni sustav tijela $[\text{rad s}^{-1}]$ .	21
$r$	Kutna brzina tijela oko $z_B$ s obzirom na koordinatni sustav tijela $[\text{rad s}^{-1}]$ .	21
$t$	Vrijeme $[\text{s}]$ . . . . .	6
$u$	Linearna brzina tijela u smjeru $x_B$ s obzirom na koordinatni sustav tijela $[\text{m s}^{-1}]$	21
$u$	Ulazni signal . . . . .	6
$v$	Linearna brzina tijela u smjeru $x_B$ s obzirom na koordinatni sustav tijela $[\text{m s}^{-1}]$	21
$w$	Linearna brzina tijela u smjeru $z_B$ s obzirom na koordinatni sustav tijela $[\text{m s}^{-1}]$	21
$x_d$	Referentna putanja $[\text{m}]$ . . . . .	33
$x_i$	Varijabla stanja . . . . .	7
$y$	Izlazni signal . . . . .	6
$z_i$	Unutarnja varijabla observera . . . . .	8

# Sažetak

U radu se razmatra estimacija i kompenzacija vanjskih poremećaja kvadkoptera primjenom tri različita observera poremećaja. Implementirani su observer poremećaja u vremenskoj domeni, observer poremećaja s proširenim prostorom stanja i robusni observer poremećaja te su prikazani na jednostavnim primjerima estimacije poremećaja. Izveden je kinematički model kvadkoptera primjenom Euler-ovih kuteva, te je pomoću Newton-Euler-ove formulacije izveden dinamički model kvadkoptera. Na temelju lineariziranog modela kvadkoptera provedena je sinteza regulatora i observera poremećaja za problem slijeđenja referentne trajektorije. Provedena je komparativna analiza performansi pojedinih observera koji su korišteni u radu za slučajeve sa i bez šuma.

**Ključne riječi:** Observer poremećaja u vremenskoj domeni; Observer s proširenim prostorom stanja; Robusni observer poremećaja; Kvadkopter

# Summary

This paper is dealing with the estimation and compensation of external disturbances of quadcopter using three different disturbance observers. Time domain disturbance observer, extended state observer and robust observer have been implemented and are shown in simple examples of disturbance estimation. Kinematic model of quadcopter has been derived using Euler angles and using Newton-Euler formulations dynamic model of quadcopter has been derived. Based on linearized model of quadcopter, synthesis of the regulator and disturbance observer has been carried out for the following reference trajectory problem. Comparative analysis of the performance of individual observers that were used in this paper was carried out for the cases with and without noise.

**Keywords:** Time domain disturbance observer; Extended state observer; Robust observer; Quadcopter

# 1 | Uvod

Poremećaji su široko rasprostranjeni u većini modernih upravljanih sustava te utječu na performanse upravljanih sustava, tako da je kompenzacija poremećaja jedan od ključnih zadataka u osmišljanju upravljačkih algoritama. Nije uvijek moguće ili nije isplativo postaviti senzore kako bi izmjerili poremećaj koji djeluje na sustav i tada dolazimo do raznih observera poremećaja.

U radu [1] predložen je novi pristup robusnom i globalno asimptotski stabilnom slijeđenju periodičkih referentnih trajektorija u robotici kao i eliminaciji periodičkih poremećaja. U radu [2] navedeni pristup poopćen je na širu klasu nelinearnih pasivnih sustava, a također je dokazano da navedeni pristup predstavlja opći okvir iz kojeg se mogu izvesti sve glavne varijante dosadašnjih regulacijskih sustava za slijeđenje periodičkih referentnih trajektorija. U radu [3] razmatran je navedeni regulacijski sustav za slučaj nepoznate frekvencije periodičke trajektorije ili poremećaja. Problem navedenih pristupa je što su ograničeni na eliminaciju isključivo periodičkih poremećaja. Kompenzacija općenitog nepoznatog neperiodičnog poremećaja moguća je primjenom regulatora s kliznim režimom (engl. *sliding-mode controller*), [4][5]. Međutim, za implementaciju navedenog regulatora potrebno je imati senzor brzine. S druge strane, implementacija regulatora s kliznim režimom u kombinaciji s estimatorima brzina [6] vodi do regulacijskog sustava za kojeg je vrlo teško dokazati stabilnost zatvorenog kruga zbog izrazite nelinearnosti i diskontinuiranosti navedenog regulatora.

U ovom radu razmatra se primjena linearnih observera poremećaja koji omogućuju eliminaciju proizvoljnih poremećaja i jednostavniji su za analizu stabilnosti. Observeri poremećaja koji će se koristiti u ovom radu su observer poremećaja u vremenskoj do-

meni, observer poremećaja s proširenim prostorom stanja i robusni observer poremećaja. Sustav na kojima će se implementirati observeri poremećaja je kvadkopter gdje će se koristiti samo  $x$ -os, a poremećaj je nalet vjetra.

### **Pregled po poglavljima**

U drugom poglavlju prikazani su observer poremećaja u vremenskoj domeni, observer poremećaja s proširenim prostorom stanja i robusni observer poremećaja te jednostavni primjeri za svaki od njih.

U idućem poglavlju izvedena je kinematički model kvadkoptera primjenom Euler-ovih kuteva te je pomoću Newton-Euler-ove formulacije izveden dinamički model kvadkoptera. Zatim je taj dinamički model lineariziran kako bi mogli implementirati observere poremećaja.

Za potrebe upravljanja u četvrtom poglavlju provedena je sinteza regulatora. Kao primjer nije uzet potpuni model kvadkoptera već je uzeta samo  $x$ -os kvadkoptera, dok se upravljanje oko ostalih osi dobije na isti način. Za svaki od observera poremećaja provedene su simulacije za slučajeve praćenja reference bez poremećaja, praćenja reference s poremećajem bez kompenzacije poremećaja, praćenje reference s poremećajem uz kompenzaciju poremećaja, praćenje reference s poremećajem uz kompenzaciju poremećaja sa šumom u mjerenoj varijabli i za kraj praćenje reference s poremećajem uz kompenzaciju poremećaja sa šumom u mjerenoj varijabli i filtriranjem upravljačke varijable. Nakon svih primjera provedena je usporedba dobivenih rezultata.



## 2 | Observer stanja i poremećaja

### 2.1. Observer poremećaja u vremenskoj domeni

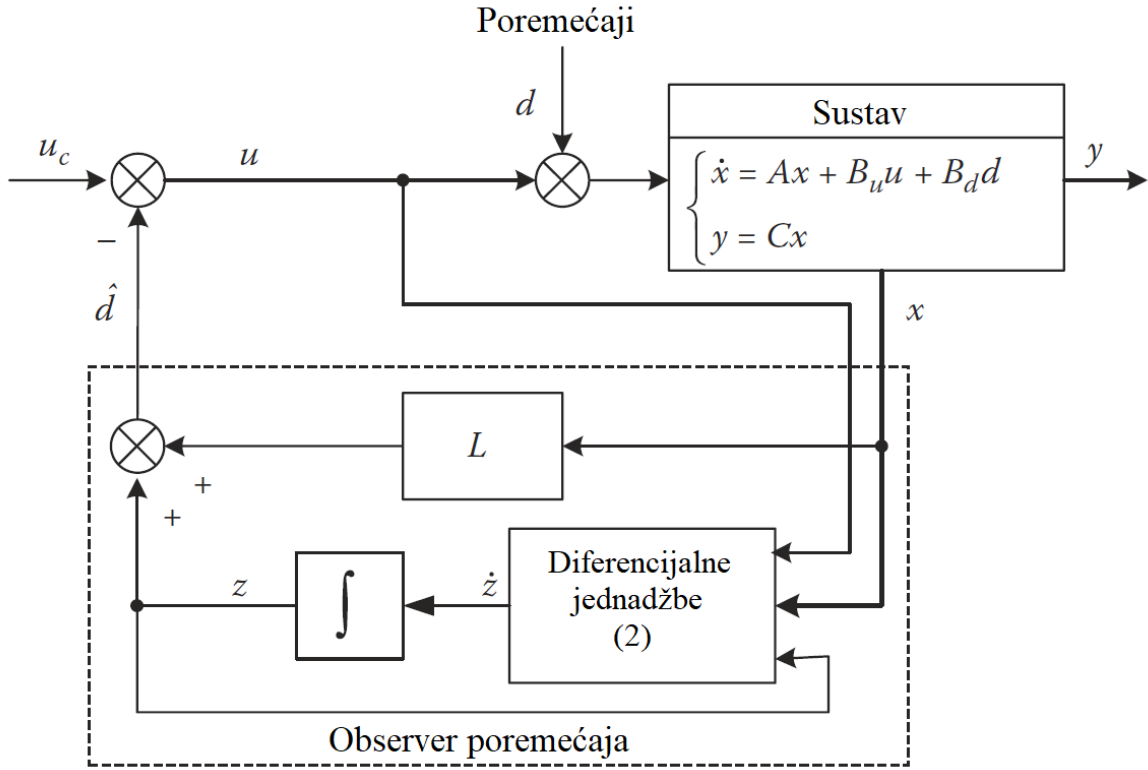
Observer poremećaja je prikazan u [7]. Imamo linearni sustav s višestrukim ulazima i višestrukim izlazima (MIMO) s poremećajem prikazan u prostoru stanja idućim jednadžbama

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_u\mathbf{u} + \mathbf{B}_d\mathbf{d}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x},\end{aligned}\tag{2.1}$$

gdje je  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^r$  i  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$  koji su redom vektori stanja, ulaza, poremećaja i izlaza.  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B}_u \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{B}_d \in \mathbb{R}^{n \times r}$  i  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{l \times n}$  predstavljaju redom matrice sustava, ulaza, poremećaja i izlaza. Observer poremećaja u vremenskoj domeni može se primijeniti za procjenu poremećaja u sustavu (2.1), dano u [8]

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= -\mathbf{L}\mathbf{B}_d(\mathbf{z} + \mathbf{L}\mathbf{x}) - \mathbf{L}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_u\mathbf{u}), \\ \hat{\mathbf{d}} &= \mathbf{z} + \mathbf{L}\mathbf{x},\end{aligned}\tag{2.2}$$

gdje je  $\hat{\mathbf{d}} \in \mathbb{R}^r$  vektor estimiranog poremećaja,  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^r$  unutarnji vektor stanja observera i  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{r \times n}$  matrica pojačanja observera. [7]



Slika 2.1: Blok dijagram observera poremećaja u vremenskoj domeni za linearne sustave. [7]

Blok dijagram observera poremećaja u vremenskoj domeni za sustav (2.1) prikazan je na slici 2.1. Pogreška estimacije poremećaja definirana je kao

$$e_d = \hat{d} - d. \quad (2.3)$$

Ako uzmemo derivaciju estimacijske pogreške (2.3) uz dinamiku sustava (2.1) i dinamiku observera (2.2) dobivamo

$$\dot{e}_d = -LB_d e_d - \dot{d}. \quad (2.4)$$

Estimacijska pogreška poremećaja prikazana je jednačbom (2.4) koja je u slučaju ograničenih ulaza i ograničenih izlaza stabilna ako je matrica pojačanja izabrana tako da je  $-LB_d$  stabilno prema Hurvitz-u. Nadalje, ako poremećaj teži konstantnoj vrijednosti tada će estimacijska pogreška sustava (2.4) biti asimptotski stabilna. [7]

**Primjer**

Imamo linearni sustav prikazan matricama

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.8 & 1 & 1.6 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & -1 \\ -0.4 & 1.2 \end{bmatrix}.$$

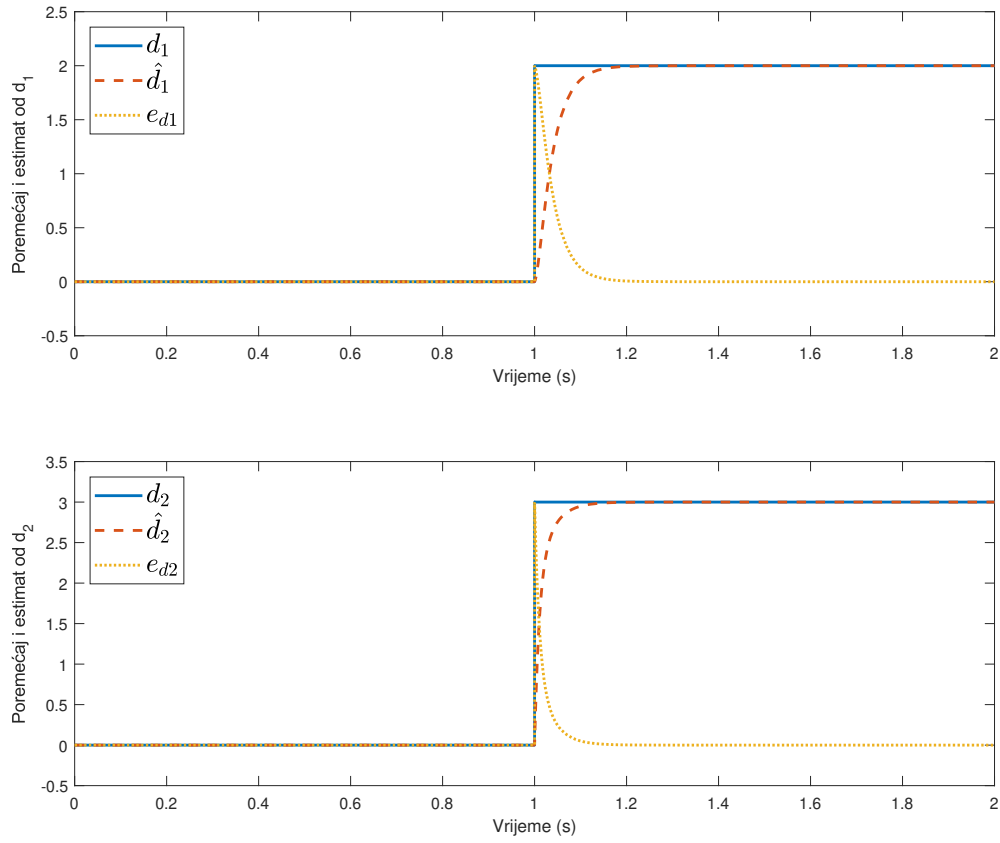
Matrica pojačanja observera poremećaja je

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 40 & 0 & -20 \\ 0 & -20 & 60 \end{bmatrix},$$

iz tih podataka možemo provjeriti stabilnost sustava iz sljedeće matrice

$$-\mathbf{LB}_d = \begin{bmatrix} -40 & 24 \\ 24 & -92 \end{bmatrix}.$$

Svojstvene vrijednosti matrice  $-\mathbf{LB}_d$  su  $\lambda_1 = -101.38$  i  $\lambda_2 = -30.62$  što nam ukazuje da je matrica  $-\mathbf{LB}_d$  stabilna po Hurvitz-u. [7]



Slika 2.2: Odzivi estimatora poremećaja za dani primjer.

Iz slike 2.2 vidljivo je da observer poremećaja u vremenskoj domeni zadan ovim matri-  
cama ima poprilično dobre performanse kod estimiranja poremećaja.

## 2.2. Observer s proširenim prostorom stanja

Observer iz ovog poglavlja prikazan je u [7]. Imamo klasu sustava s jednim ulazom i jednim izlazom (SISO)  $n$ -tog reda te nepoznatim poremećajem, koji su prikazani idućom diferencijalnom jednadžbom

$$y^{(n)}(t) = f(y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t), d(t), t) + bu(t), \quad (2.5)$$

gdje je  $d(t)$  vanjski poremećaj,  $u(t)$  ulazni signal,  $y(t)$  izlazni signal,  $b$  parametar sustava te  $f(y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t), d(t), t)$  funkcija koja se sastoji od vanjskih poremećaja  $d(t)$  i unutarnjih poremećaja izazvanih nepoznanicama u modelu. [7]

Neka je  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$ ,  $x_3 = \ddot{y}$ ,  $\dots$ ,  $x_n = y^{(n-1)}$ . Sustav (2.5) može se prikazati u prostoru stanja kao

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n, \\ \dot{x}_n &= f(x_1, x_2, \dots, x_n, d(t), t) + bu, \\ y &= x_1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Proširena varijabla stanja

$$x_{n+1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n, d(t), t), \quad (2.7)$$

koja se najčešće uvodi u okviru observera s proširenim prostorom stanja kako bi linearizirali sustav (2.6). Uvrstimo li (2.7) u (2.6), prošireni prostor stanja dobiva oblik

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n, \\ \dot{x}_n &= x_{n+1} + bu, \\ \dot{x}_{n+1} &= h(t), \\ y &= x_1, \end{aligned} \quad (2.8)$$



gdje je  $h(t) = \dot{f}(x_1, x_2, \dots, x_n, d(t), t)$ . [7]

Kako bi mogli estimirati varijable stanja, linearni observer s proširenim stanjima općenito je dizajniran kao

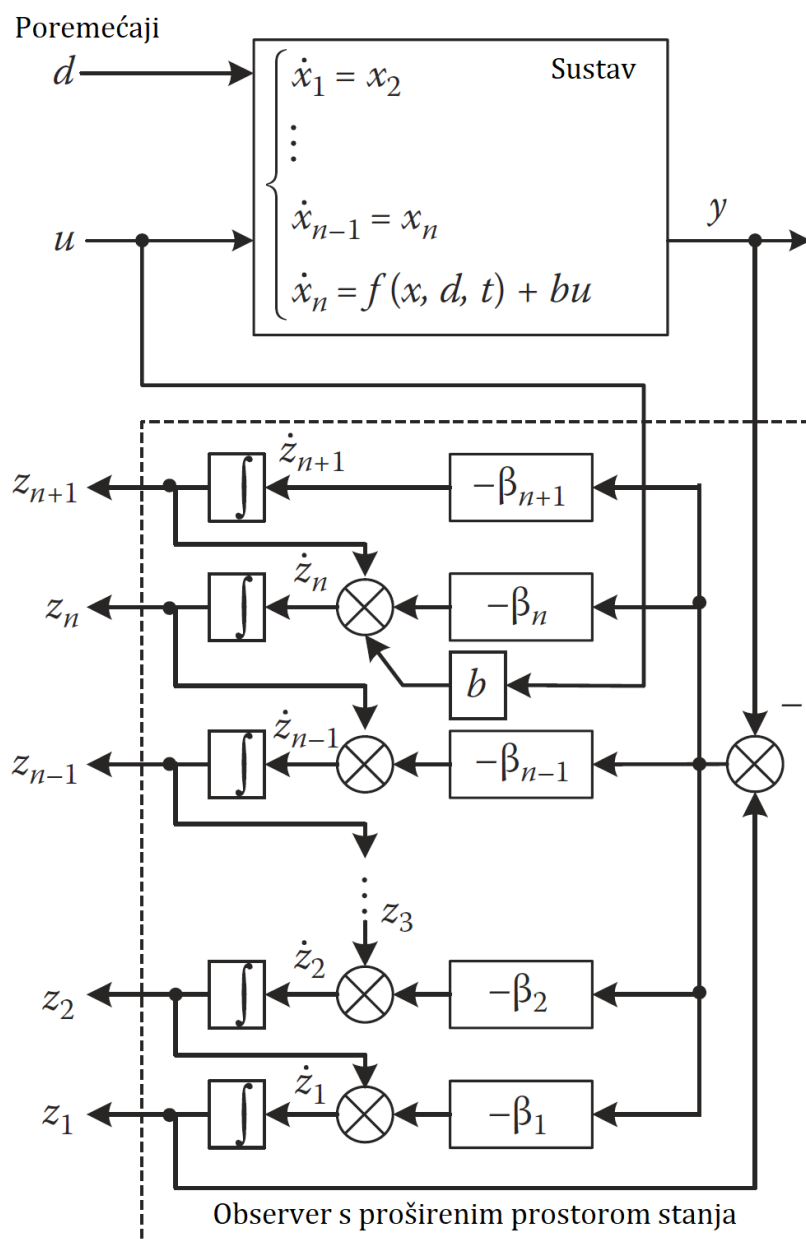
$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 - \beta_1(z_1 - y), \\ \dot{z}_2 &= z_3 - \beta_2(z_1 - y), \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= z_{n+1} - \beta_n(z_1 - y) + bu, \\ \dot{z}_{n+1} &= -\beta_{n+1}(z_1 - y),\end{aligned}\tag{2.9}$$

gdje su  $z_1, z_2, \dots, z_n$  i  $z_{n+1}$  procjene stanja za  $x_1, x_2, \dots, x_n$  i  $x_{n+1}$  redom te su  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1}$  pojačanja observera. Blok dijagram observera s proširenim prostorom stanja je prikazan na slici 2.3. [7]

Oduzimanjem (2.8) od (2.9) dobivamo pogrešku estimacije varijabli stanja

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 - \beta_1 e_1, \\ \dot{e}_2 &= e_3 - \beta_2 e_1, \\ &\vdots \\ \dot{e}_n &= e_{n+1} - \beta_n e_1, \\ \dot{e}_{n+1} &= -\beta_{n+1} e_1 - h(t),\end{aligned}\tag{2.10}$$

gdje  $e_i = z_i - x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n+1$ ) predstavljaju stanja estimacijske pogreške. Pokazano je da je stabilnost sustava koji ima ograničene ulaze i izlaze (2.10) garantirana pod uvjetom da je  $h(t)$  ograničen. [7]



Slika 2.3: Blok dijagram observera s proširenim prostorom stanja za linearni sustav. [7]

## Primjer

Imamo sustav drugog reda prikazan u prostoru stanja

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= e^{x_1} + d + u, \\ y &= x_1.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Kada taj sustav zapišemo u proširenom prostoru stanja dobivamo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3 + u, \\ \dot{x}_3 &= h, \\ y &= x_1,\end{aligned}\tag{2.12}$$

gdje se ukupni poremećaj uzima kao  $x_3 = d$ , koji sadrži nelinearnosti sustava i vanjske poremećaje, a  $h = \dot{d}$ . Vanjski poremećaj je oblika  $d(t) = 9e^{-12(t-6)^2}$ . Observer s proširenim prostorom stanja prikazan je idućim sustavom jednadžbi

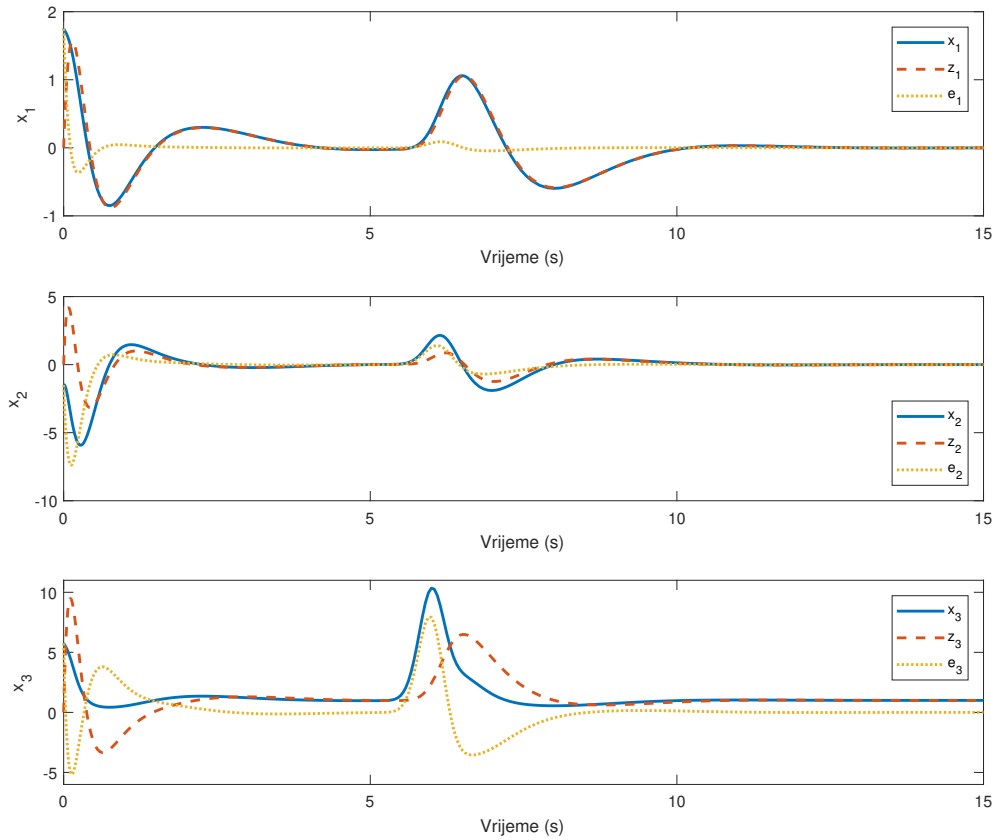
$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 - \beta_1(z_1 - y), \\ \dot{z}_2 &= z_3 - \beta_2(z_1 - y) + u, \\ \dot{z}_3 &= -\beta_3(z_1 - y).\end{aligned}\tag{2.13}$$

Pojačanja  $\beta_i$  dobivaju se metodom postavljanja polova te se dobiva

$$L = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3w & 3w^2 & w^3 \end{bmatrix}^T,\tag{2.14}$$

gdje mora vrijediti  $w > 0$ . Jedini parametar koji se mora namještati je  $w$ . U ovom primjeru uzeta je vrijednost  $w = 5$ , kojom se dobivaju sljedeća pojačanja:  $\beta_1 = 15$ ,  $\beta_2 = 75$ ,  $\beta_3 = 125$ . Upravljačka varijabla sastoji se od estimiranih varijabli stanja  $z_1$  i  $z_2$  te varijable estimiranog poremećaja  $z_3$ , je oblika

$$u = -4z_1 - 4z_2 - z_3.\tag{2.15}$$



Slika 2.4: Odzivi varijabli stanja i estimirani poremećaj.

Odzivi oba stanja i estimirani poremećaj su prikazani na slici 2.4. Vidljivo je iz slike da takav observer s proširenim stanjima može efektivno estimirati oba stanja i poremećaj u prisustvu nesigurnosti.

## 2.3. Robusni estimator poremećaja

Linearni sustav s višestrukim ulazima i višestrukim izlazima (MIMO) s poremećajem prikazan je u prostoru stanja sljedećim jednadžbama

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_u\mathbf{u} + \mathbf{B}_d d, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x},\end{aligned}\tag{2.16}$$

gdje je  $d$  poremećaj,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  i  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$  su redom vektori stanja, ulaza i izlaza te  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B}_u \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{B}_d \in \mathbb{R}^{n \times r}$  i  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{l \times n}$  predstavljaju redom matrice sustava, ulaza, poremećaja i izlaza. Robusni observer  $n$ -tog reda u  $s$  domeni ima oblik

$$\hat{d} = \frac{\lambda^n}{(s + \lambda)^n} d(s),\tag{2.17}$$

gdje je  $\hat{d}$  estimirani poremećaj, a  $\lambda$  pol observera. Taj se robusni observer obrnutom Laplaceovom transformacijom prebaci u vremensku domenu. Iz sustava (2.16) dobiva se poremećaj koji je uvršten u robusni observer u vremenskoj domeni. Kada se observer u prostoru stanja prebaci u matrični oblik, moguće ga je zapisati i u obliku

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}_e \mathbf{z} + \mathbf{B}_e \mathbf{u}_e, \\ \hat{d} &= \mathbf{C}_e \mathbf{z} + \mathbf{D}_e \mathbf{u}_e,\end{aligned}\tag{2.18}$$

gdje su  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u}_e \in \mathbb{R}^m$  redom unutarnji vektor observera i ulaza,  $\mathbf{A}_e \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B}_e \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{C}_e \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ,  $\mathbf{D}_e \in \mathbb{R}^{1 \times m}$  matrice observera. [9]

### Primjer

Imamo MDS-sustav prikazan jednadžbama (2.16) te su matrice

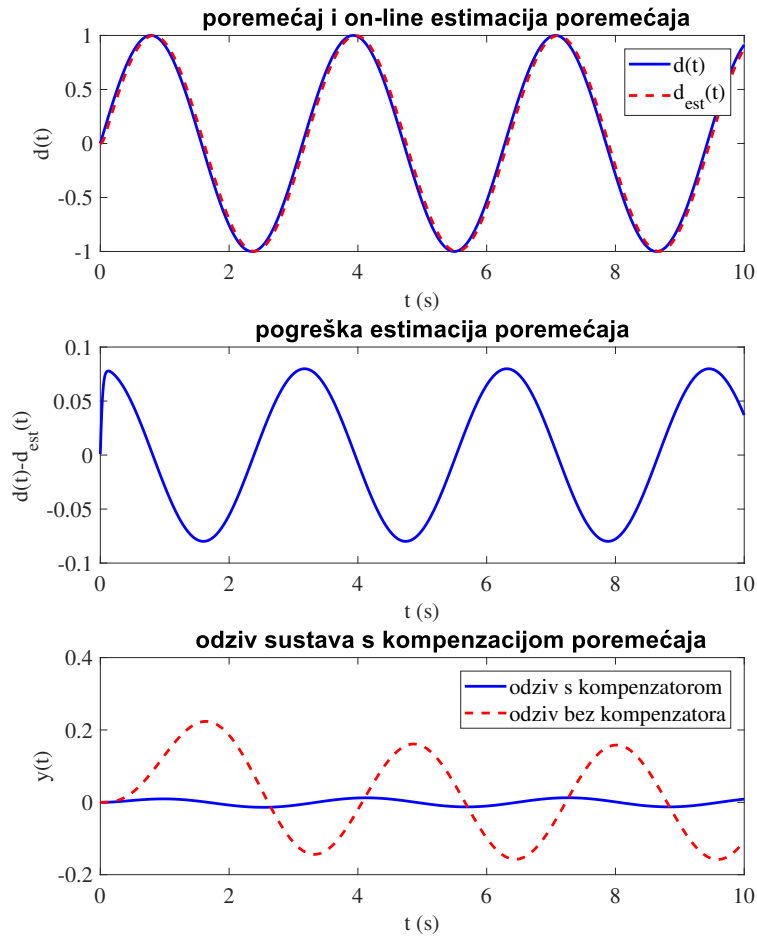
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a observer poremećaja prikazan je jednadžbama (2.18), gdje su matrice observera

$$\mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda^2 \\ 1 & -2\lambda \end{bmatrix}, \mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} -m\lambda^4 & -\lambda^2 \\ -2m\lambda^3 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} m\lambda^2 & 0 \end{bmatrix},$$

gdje je masa  $m = 1\text{kg}$ , a polovi sustava  $\lambda = 50$ .





Slika 2.5: Odziv danog sustava s robusnim estimatorom poremećaja.

Iz slike 2.5 vidljivo je da se poremećaj uspješno estimira te da se uspješno kompenzira njegovo djelovanje.

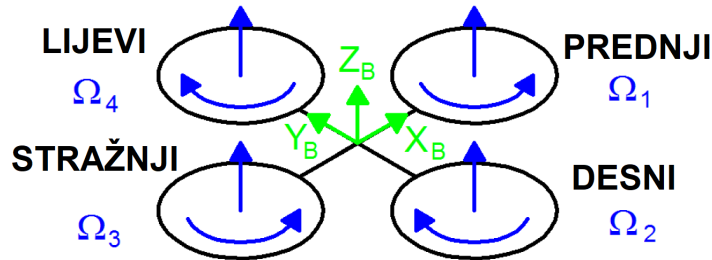
## 3 | Matematički model kvadkoptera

### 3.1. Osnovni koncepti

U ovom poglavlju korišteni su izvodi i pretpostavke iz [10]. Kvadkopter je modeliran s četiri rotora u križnoj konfiguraciji. Ta križna konfiguracija je poprilično tanka i lagana, ali pokazuje robusnost mehaničkim povezivanjem motora. Svaki propeler je preko reduktora povezan na motor. Sve osi rotacije propelera su fiksne i paralelne. Nadalje, propeleri imaju fiksni nagib lopatica i njihov potisak je usmjeren dolje kako bi mogli podići kvadkopter. Sve te činjenice nam ukazuju da je struktura poprilično kruta te da je jedina promjenjiva varijabla brzina propelera. [10]

Motori i reduktori nisu važni zato što su pomaci povezani s brzinama propelera. Osnovni model kvadkoptera za određivanje kretnji sastoji se od tanke križne strukture s četiri propelera na krajevima. [10]

Prednji i stražnji propeler rotiraju se u smjeru obrnutom kazaljka na satu, dok se lijevi i desni propeler rotiraju u smjeru kazaljke na satu. Ova konfiguracija s parovima propelera koji se rotiraju u suprotnim smjerovima uklanja potrebu za repnim rotorom, bitnim u uobičajenim strukturama helikoptera. [10]



Slika 3.1: Pojednostavljeni kvadrokopter u stanju lebdenja. [10]

Slika 3.1 prikazuje pojednostavljeni model kvadrokoptera koji je u stanju lebdenja, gdje svi propeleri imaju jednaku brzinu. Koordinatni sustav koji je vezan uz tijelo kvadrokoptera prikazan je zelenom bojom, a plavom su označene kutne brzine propelera. Dodatno, uz imena varijabli brzina svakog propelera nacrtane su dvije strelice, od kojih zakrivljena pokazuje smjer rotacije, a uspravna brzinu. Vertikalna strelica prikaza brzine usmjerena je prema gore, što znači da neće vrijediti pravilo desne ruke za rotaciju u smjeru kazaljke na satu. Prikaz se pojednostavljuje jer ona modelira i vertikalni potisak. Inače bi postojala dva vektora koji pokazuju prema gore i dva koji pokazuju prema dolje. [10]

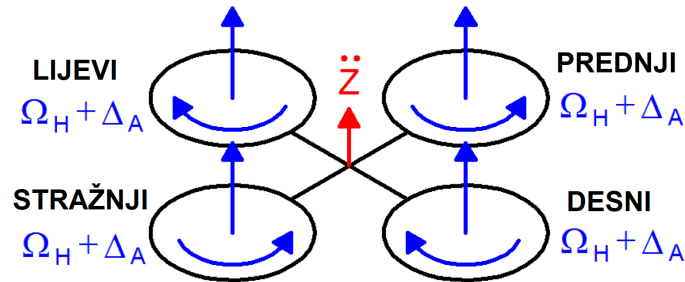
U modelu na slici 3.1 svi se propeleri vrte jednakom brzinom  $\Omega_H$  [ $\text{rad s}^{-1}$ ] (brzinom lebdenja) kako bi poništili akceleraciju gravitacije. Tako kvadrokopter postiže stacionarno letenje. [10]

Kvadrokopter ne može postići željene točke za sve stupnjeve slobode gibanja već maksimalno četiri, zato što ima šest stupnjeva slobode gibanja, a ima samo četiri propelera. Međutim, zahvaljujući svojoj strukturi, poprilično je jednostavno odabrati varijable s kojima je lako upravljati te ih razdvojiti kako bi pojednostavili upravljanje. Četiri upravljive varijable kvadrokoptera povezane su s četiri osnovne kretnje koje omogućuju kvadrokopteru da dosegne bilo koju poziciju u prostoru. [10] Te četiri kretnje su:

- Uzdizanje ( $U_1$  [N])

Naredba uzdizanja izvršava se povećanjem (ili smanjenjem) brzine svih propelera za jednak iznos. To dovodi do vertikalne sile koja podiže ili spušta kvadrokopter. Ako je kvadrokopter u horizontalnom položaju, tada se vertikalni smjer inercijskog koordinatnog sustava i smjer koordinatnog sustava vezanog za tijelo kvadrokoptera

podudaraju. Ako to nije slučaj, tada je uzgon postignut kombinacijom horizontalnih i vertikalnih akceleracija u referentnom koordinatnom sustavu. [10]

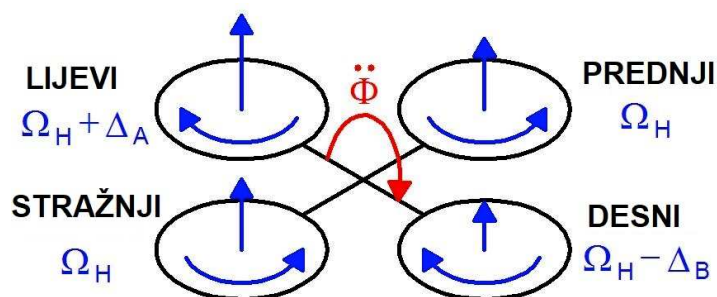


Slika 3.2: Pokret uzdizanja. [10]

Na slici 3.2 prikazana je naredba uzdizanja na pojednostavljenom modelu kvadrokoptera. Plavom bojom su zadane brzine propelera, koje su u ovom slučaju jednake  $\Omega_H + \Delta_A$  za svaki od propelera.  $\Delta_A$  [ $\text{rad s}^{-1}$ ] je pozitivna varijabla koja predstavlja povećanje konstante  $\Omega_H$ .  $\Delta_A$  ne smije biti prevelika kako model ne bi završio pod utjecajem jakih nelinearnih sila i da ne bi ušao u zasićenje. [10]

- Valjanje ( $U_2$  [N m])

Naredba valjanja izvršava se povećanjem (ili smanjenjem) brzine lijevog propelera i smanjenjem (ili povećanjem) brzine desnog propelera. Izvođenje ove naredbe dovodi do momenta oko uzdužne osi kvadrokoptera što ga dovodi u stanje valjanja. Ukupni vertikalni potisak jednak je onome kod lebdenja, stoga ova naredba dovodi samo do promjene ubrzanja valjanja (u prvoj aproksimaciji). [10]

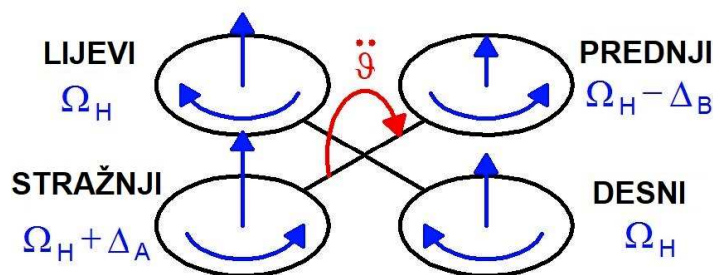


Slika 3.3: Pokret valjanja. [10]

Na slici 3.3 prikazana je naredba valjanja na pojednostavljenom modelu kvadrokoptera. Pozitivne varijable  $\Delta_A$  i  $\Delta_B$  [ $rad\ s^{-1}$ ] odabrane su tako da vertikalni potisak ostane nepromijenjen. Može se demonstrirati da za male vrijednosti  $\Delta_A$  vrijedi  $\Delta_B \approx \Delta_A$ . Kao i u prethodnom slučaju te vrijednosti ne smiju biti prevelike jer bi moglo doći do velikih nelinearnosti ili zasićenja. [10]

- Poniranje ( $U_3$  [N m])

Ova naredba vrlo je slična valjanju. Ostvarujemo ju povećanjem (ili smanjenjem) brzine na stražnjem propeleru i smanjenjem (ili povećanjem) brzine prednjeg propelera. Izvođenjem naredbe dolazi se do momenta oko poprječne osi što dovodi kvadrokopter u stanje poniranja. Kao i kod naredbe valjanja, ukupni vertikalni pritisak jednak je onom kod lebdenja čime naredba utječe na promjenu brzine poniranja. [10]



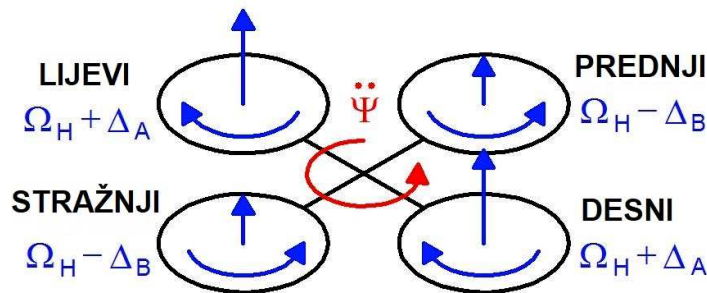
Slika 3.4: Pokret poniranja. [10]

Slika 3.4 prikazuje naredbu poniranja na pojednostavljenom modelu kvadrokoptera. Kao i u prethodnom slučaju, pozitivne varijable  $\Delta_A$  i  $\Delta_B$  su odabrane tako da vertikalni potisak ostane nepromijenjen te ne smiju biti prevelike. Također za male vrijednosti  $\Delta_A$  vrijedi  $\Delta_B \approx \Delta_A$ . [10]

- Skretanje ( $U_4$  [N m])

Naredba skretanja izvršava se istodobnim povećanjem (ili smanjenjem) brzine vrtnje prednjeg i stražnjeg propelera te istodobnim smanjenjem (ili povećanjem) brzine lijevog i desnog propelera. To dovodi do momenta oko vertikalne osi koja dovodi kvadrokopter u stanje skretanja. Pokret skretanja je moguć zahvaljujući činjenici da se lijevi i desni propeleri vrte u smjeru kazaljke na satu, dok se prednji i stražnji propeler vrte u smjeru obrnutom smjeru kazaljke na satu. Zbog toga,

kada ukupni moment nije uravnotežen, dolazi do rotacije kvadkoptera oko njegove vertikalne osi. Ukupni vertikalni potisak jednak je onome kod lebdenja, stoga ova naredba utječe samo na promjene ubrzanja skretanja. [10]



Slika 3.5: Pokret skretanja. [10]

Na slici 3.5 prikazana je naredba skretanja na skici kvadkoptera. Kao i u prethodna dva slučaja, pozitivne varijable  $\Delta_A$  i  $\Delta_B$  odabrane su tako da vertikalni potisak ostane nepromijenjen te ne smiju biti prevelike. Nadalje, za male vrijednosti  $\Delta_A$  vrijedi  $\Delta_B \approx \Delta_A$ . [10]

Kako bi mogli izvesti Newton-Euler-ov model moramo prvo opisati kinematiku i dinamiku kvadkoptera. [10]

## 3.2. Kinematika

U ovom poglavlju korišteni su izvodi i pretpostavke iz [10]. Kinematika je grana mehanike koja proučava tijelo ili više tijela u gibanju ne uzimajući u obzir sile i momente koje djeluju na njega [10]. Kako bi se prikazalo gibanje krutog tijela sa šest stupnjeva slobode gibanja, definirat ćemo dva koordinatna sustava [11]:

- Zemljin koordinatni sustav,
- Koordinatni sustav tijela kvadkoptera.

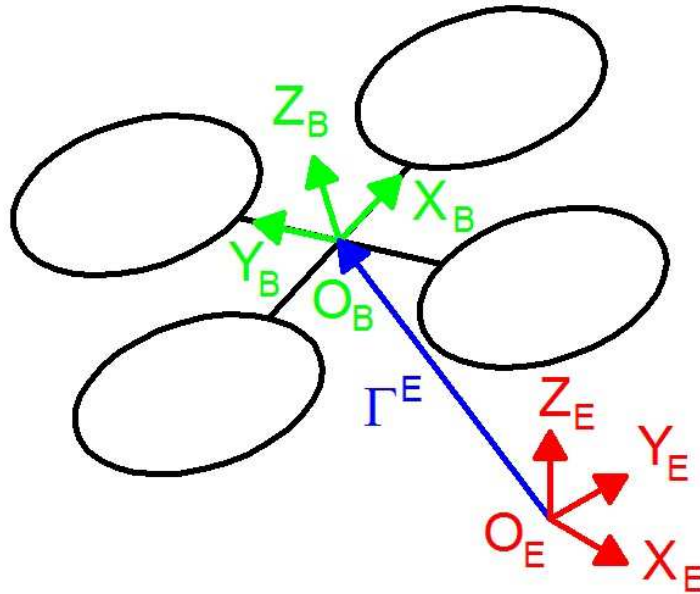
Zemljin koordinatni sustav  $(o_E, x_E, y_E, z_E)$  podudara se s inercijskim desnim koordinatnim sustavom.  $x_E$  pokazuje smjer sjevera,  $y_E$  smjer zapada,  $z_E$  prema gore u odnosu

na Zemlju i  $o_E$  je ishodište koordinatnog sustava. Taj koordinatni sustav koristi se kako bismo definirali linearnu poziciju ( $\Gamma^E$  [m]) i kutnu poziciju ( $\Theta^E$  [rad]) kvadrokoptera. [10]

Koordinatni sustav tijela kvadrokoptera ( $o_B, x_B, y_B, z_B$ ) je desni koordinatni sustav i nalazi se na tijelu kvadrokoptera. Središte koordinatnog sustava  $o_B$  odabrano je tako da se podudara sa sjecištem križne strukture kvadrokoptera. Koordinatna os  $x_B$  postavljena je prema prednjem dijelu kvadrokoptera,  $y_B$  prema lijevom dijelu kvadrokoptera,  $z_B$  je usmjeren prema gore. U ovom koordinatnom sustavu definirani su linearna brzina ( $\mathbf{V}^B$  [m s<sup>-1</sup>]), kutna brzina ( $\boldsymbol{\omega}^B$  [rad s<sup>-1</sup>]), sile ( $\mathbf{F}^B$  [N]) i momenti ( $\boldsymbol{\tau}^B$  [N m]). [10]

Linearna pozicija  $\Gamma^E$  kvadrokoptera određena je koordinatama vektora između ishodišta koordinatnog sustava tijela i ishodišta koordinatnog sustava Zemlje s obzirom na koordinatni sustav Zemlje prema jednadžbi (3.1). [10]

$$\Gamma^E = [X \ Y \ Z]^T \quad (3.1)$$



Slika 3.6: Koordinatni sustavi kvadrokoptera. [10]

Na slici 3.6 prikazana su ta dva koordinatna sustava i njihov odnos. Kutna pozicija  $\Theta^E$  kvadrokoptera je definirana orijentacijom koordinatnog sustava tijela u odnosu na Zemljin koordinatni sustav te je zadana s tri rotacije oko glavnih osi. U ovom radu

korišten je "valjanje-poniranje-skretanje" set Euler-ovih kutova te je prikazana idućom jednađbom. [10]

$$\Theta^E = [\phi \ \theta \ \psi]^T \quad (3.2)$$

Rotacijska matrica  $\mathbf{R}_\Theta$  dobiva se množenjem triju osnovnih matrica idućim redoslijedom:

- Rotacija za kut  $\psi$  (skretanje) oko osi  $z_E$  prikazano maticom  $\mathbf{R}(\psi, z)$ .

$$\mathbf{R}(\psi, z) = \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

- Rotacija za kut  $\theta$  (poniranje) oko osi  $y_1$  prikazano maticom  $\mathbf{R}(\theta, y)$ .

$$\mathbf{R}(\theta, y) = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

- Rotacija za kut  $\phi$  (valjanje) oko osi  $x_1$  prikazano maticom  $\mathbf{R}(\phi, x)$ .

$$\mathbf{R}(\phi, x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi & c_\phi \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

U gore navedenim i idućim jednađbama koristi se zapis:  $c_x = \cos(x)$ ,  $s_x = \sin(x)$ ,  $t_x = \tan(x)$ . Jednađba (3.6) prikazuje rotacijsku matricu  $\mathbf{R}_\Theta$ .

$$\mathbf{R}_\Theta = \mathbf{R}(\psi, z) \mathbf{R}(\theta, y) \mathbf{R}(\phi, x) = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & -s_\psi c_\theta + c_\psi s_\theta s_\phi & s_\psi s_\theta + c_\psi s_\theta c_\phi \\ s_\psi c_\theta & c_\psi c_\theta + s_\psi s_\theta s_\phi & -c_\psi s_\theta + s_\psi s_\theta c_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix} \quad (3.6)$$



Kao što je već bilo navedeno, linearna  $\mathbf{V}^B$  i kutna  $\boldsymbol{\omega}^B$  brzina su izražene u koordinatnom sustavu tijela kvadrokoptera. Te matrice definirane su kao:

$$\mathbf{V}^B = [u \ v \ w]^T, \quad (3.7)$$

$$\boldsymbol{\omega}^B = [p \ q \ r]^T. \quad (3.8)$$

Moguće je kombinirati linearnu i kutnu brzinu kako bi imali kompletan prikaz tijela u prostoru pomoću vektora općenitog položaja i općenite brzine koji su prikazani jednadžbama (3.9) i (3.10).

$$\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{\Gamma}^E \ \boldsymbol{\Theta}^E] = [X \ Y \ Z \ \phi \ \theta \ \psi]^T \quad (3.9)$$

$$\boldsymbol{\nu} = [\mathbf{V}^B \ \boldsymbol{\omega}^B] = [u \ v \ w \ p \ q \ r]^T \quad (3.10)$$

Odnos linearne brzine u koordinatnom sustavu tijela  $\mathbf{V}^B$  i one u koordinatnom sustavu Zemlje  $\mathbf{V}^E$  uključuje rotacijsku matricu  $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\Theta}}$  ( $\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^E$ ), kako je prikazano u jednadžbi (3.11).

$$\mathbf{V}^E = \dot{\boldsymbol{\Gamma}}^E = \mathbf{R}_{\boldsymbol{\Theta}} \mathbf{V}^B \quad (3.11)$$

Također, moguće je povezati kutnu brzinu u koordinatnom sustavu Zemlje  $\dot{\boldsymbol{\Theta}}^E$  s onom u koordinatnom sustavu tijela  $\boldsymbol{\omega}^B$  pomoću matrice transformacije  $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\Theta}}$ . Njihov međuođnos prikazujemo jednadžbama (3.12) i (3.13).

$$\boldsymbol{\omega}^B = \mathbf{T}_{\boldsymbol{\Theta}}^{-1} \dot{\boldsymbol{\Theta}}^E \quad (3.12)$$

$$\dot{\boldsymbol{\Theta}}^E = \mathbf{T}_{\boldsymbol{\Theta}} \boldsymbol{\omega}^B \quad (3.13)$$

Matrica transformacije  $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\Theta}}$  može se odrediti rješavanjem Euler-ovih odnosa  $\dot{\boldsymbol{\Theta}}^E$  u koordinatnom sustavu tijela, kako je prikazano u jednadžbama (3.14), (3.15) i (3.16).

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\phi, x)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\phi, x)^{-1} \mathbf{R}(\theta, y)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{\boldsymbol{\Theta}}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{T}_{\boldsymbol{\Theta}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_{\theta} \\ 0 & c_{\phi} & c_{\theta}s_{\phi} \\ 0 & s_{\phi} & c_{\theta}c_{\phi} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{T}_{\Theta} = \begin{bmatrix} 1 & s_{\phi}t_{\theta} & c_{\phi}t_{\theta} \\ 0 & c_{\phi} & -s_{\phi} \\ 0 & s_{\phi}/c_{\theta} & c_{\phi}/c_{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Jednadžbe (3.11) i (3.13) moguće je prikazati jednom jednakošću, koja dovodi u odnos derivacije općenite pozicije u koordinatnom sustavu Zemlje  $\dot{\boldsymbol{\xi}}$  i općenite brzine u koordinatnom sustavu tijela  $\boldsymbol{\nu}$ . Transformacija je moguća zahvaljujući općenitoj matrici  $\mathbf{J}_{\Theta}$ , gdje zapis  $\mathbf{0}_{3 \times 3}$  predstavlja podmatricu nul-matrice dimenzija  $3 \times 3$ . Pomoću jednadžbi (3.17) i (3.18) prikazujemo gore opisanu transformaciju. [10]

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{J}_{\Theta} \boldsymbol{\nu} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{J}_{\Theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\Theta} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{T}_{\Theta} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

### 3.3. Dinamika

U ovom poglavlju korišteni su izvodi i pretpostavke iz [10]. Dinamika je grana mehanike koja proučava utjecaj sila i momenata na tijelo u pokretu ili sklop. Postoji više tehnika koje se koriste kako bi dobili jednadžbe krutog tijela sa šest stupnjeva slobode. U ovom radu se koristi Newton-Euler-ova formulacija [10]. Jednadžbe su povoljnije formulirane u koordinatnom sustavu tijela zato što tim zapisom [11]:

- Inercijska matrica je vremenski invarijantna.
- U slučaju simetrije tijela, jednadžbe se mogu pojednostaviti.
- Mjerenja se jednostavno mogu prebaciti u koordinatni sustav tijela.
- Upravljačke sile u većini slučajeva su dane u koordinatnom sustavu tijela.

Odluka da se jednadžbe kretanja prikažu pomoću koordinatnom sustavu tijela smanjuje kompleksnost izraza sile, dok se povećava kompleksnost izraza ubrzanja. U ovom pristupu uzete su dvije pretpostavke [10]:

- Prva pretpostavka je da se ishodište koordinatnog sustava tijela poklapa s centrom mase tijela. Inače bi morali uzeti centar mase u računu te bi ga time zakomplicirali.

- Druga pretpostavka nam govori da se osi koordinatnog sustava tijela poklapaju s osima inercijskog koordinatnog sustava. U tom slučaju, inercijska matrica  $\mathbf{I}$  je dijagonalna matrica te se jednačbe tijela pojednostavljaju.

Iz prvog Euler-ovog aksioma drugog Newton-ovog zakona slijedi derivacija linearnih komponenti kretanja tijela prema jednačbama (3.19)

$$\begin{aligned}
 m \ddot{\mathbf{r}}^E &= \mathbf{F}^E, \\
 m \widehat{\dot{\mathbf{R}}_\Theta \mathbf{V}^B} &= \mathbf{R}_\Theta \mathbf{F}^B, \\
 m (\mathbf{R}_\Theta \dot{\mathbf{V}}^B + \dot{\mathbf{R}}_\Theta \mathbf{V}^B) &= \mathbf{R}_\Theta \mathbf{F}^B, \\
 m \mathbf{R}_\Theta (\dot{\mathbf{V}}^B + \boldsymbol{\omega}^B \times \mathbf{V}^B) &= \mathbf{R}_\Theta \mathbf{F}^B, \\
 m (\dot{\mathbf{V}}^B + \boldsymbol{\omega}^B \times \mathbf{V}^B) &= \mathbf{F}^B,
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

gdje je  $m$  masa kvadkoptera,  $\ddot{\mathbf{r}}^E$  vektor linearnog ubrzanja kvadkoptera u odnosu na Zemljin koordinatni sustav,  $\mathbf{F}^E$  je vektor sila kvadkoptera u odnosu na Zemljin koordinatni sustav,  $\dot{\mathbf{V}}^B$  je vektor linearnog ubrzanja kvadkoptera u odnosu na koordinatni sustav tijela i  $\dot{\mathbf{R}}_\Theta$  je derivacija rotacijske matrice. [10]

Jednačba (3.20) pokazuje derivaciju kutne komponente tijela u pokretu iz drugog Euler-ovog aksioma drugog Newton-ovog zakona.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I} \ddot{\boldsymbol{\Theta}}^E &= \boldsymbol{\tau}^E \\
 \mathbf{I} \widehat{\dot{\mathbf{T}}_\Theta \boldsymbol{\omega}^B} &= \mathbf{T}_\Theta \boldsymbol{\tau}^B \\
 &\vdots \\
 \mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}}^B + \boldsymbol{\omega}^B \times (\mathbf{I} \boldsymbol{\omega}^B) &= \mathbf{T}_\Theta \boldsymbol{\tau}^B
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

U jednačbi (3.20)  $\mathbf{I}$  je inercijska matrica tijela,  $\ddot{\boldsymbol{\Theta}}^E$  vektor kutnog ubrzanja kvadkoptera u odnosu na Zemljin koordinatni sustav,  $\dot{\boldsymbol{\omega}}^B$  vektor kutnog ubrzanja u odnosu na koordinatni sustav tijela te je  $\boldsymbol{\tau}^E$  vektor momenata kvadkoptera u odnosu na Zemljin koordinatni sustav. [10]

Kombiniranjem jednačbi (3.19) i (3.20) moguće je opisati kretanje krutog tijela sa šest stupnjeva slobode gibanja. Matrični zapis dinamike sustava prikazan je jednačbom (3.21).

$$\begin{bmatrix} m\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{V}}^B \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}^B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}^B \times (m\mathbf{V}^B) \\ \boldsymbol{\omega}^B \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^B \\ \boldsymbol{\tau}^B \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

Zapis  $\mathbf{I}_{3 \times 3}$  prikazuje jediničnu matricu dimenzija  $3 \times 3$ . Ova jednadžba je općenita te se može primijeniti na sva kruta tijela koja odgovaraju danim pojednostavljenjima. [10]

### 3.4. Newton-Euler-ov model

U ovom poglavlju korišteni su izvodi i pretpostavke iz [10]. Općeniti vektor sile  $\mathbf{\Lambda}$  je

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^B & \boldsymbol{\tau}^B \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z & \tau_x & \tau_y & \tau_z \end{bmatrix}^T. \quad (3.22)$$

Sada je jednadžbu (3.21) moguće zapisati u matričnom obliku

$$\mathbf{M}_B \dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{C}_B(\boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu} = \mathbf{\Lambda}, \quad (3.23)$$

gdje je  $\dot{\boldsymbol{\nu}}$  je općeniti vektor ubrzanja u koordinatnom sustavu tijela,  $\mathbf{M}_B$  inercijska matrica sustava i  $\mathbf{C}_B(\boldsymbol{\nu})$  Coriolis-ova centripetalna matrica u koordinatnom sustavu tijela. Inercijska matrica sustava je prikazana jednadžbom (3.24).

$$\mathbf{M}_B = \begin{bmatrix} m\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{ZZ} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Iz matrice se vidi da je dijagonalna i konstantna zahvaljujući pretpostavkama koje smo naveli u poglavlju dinamika. Coriolis-ova centripetalna matrica prikazana je jednadžbom (3.25).

$$\mathbf{C}_B(\boldsymbol{\nu}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & -m\mathbf{S}(\mathbf{V}^B) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{S}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & mw & -mv \\ 0 & 0 & 0 & -mw & 0 & mu \\ 0 & 0 & 0 & mv & -mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{ZZ}r & -I_{YY}q \\ 0 & 0 & 0 & -I_{ZZ}r & 0 & I_{XX}p \\ 0 & 0 & 0 & I_{YY}q & -I_{XX}p & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

U jednadžbi (3.25) koristi se antisimetrični operator  $\mathbf{S}$ . Za općeniti trodimenzionalni vektor  $\mathbf{k}$ , antisimetrična matrica matrice  $\mathbf{k}(\mathbf{S}(\mathbf{k}))$  definirana je jednadžbom (3.26). [10]

$$\mathbf{S}(\mathbf{k}) = -\mathbf{S}^T(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} 0 & -k_3 & k_1 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & k_1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Jednadžba (3.23) je poopćena i vrijedi za sva kruta tijela koja odgovaraju pretpostavkama pojednostavljenja. Zadnji vektor u toj jednadžbi sadrži informacije o dinamici.  $\mathbf{\Lambda}$  se može podijeliti na 3 komponente. [10]

Prvi pridonos je gravitacijski vektor  $\mathbf{G}_B(\boldsymbol{\xi})$  koji proizlazi iz ubrzanja sile teže  $g$ . Pošto imamo samo sile bez momenata, taj vektor će biti linearan, a ne kutni. Jednadžbom (3.27) prikazuje se dobivanje gravitacijskog vektora  $\mathbf{G}_B(\boldsymbol{\xi})$ .

$$\mathbf{G}_B(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_G^B \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\Theta}^{-1} \mathbf{F}_G^E \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\Theta}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mgs_{\theta} \\ -mgc_{\theta}s_{\phi} \\ -mgc_{\theta}s_{\phi} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

gdje je  $\mathbf{F}_G^B$  vektor gravitacijske sile u koordinatnom sustavu tijela,  $\mathbf{F}_G^E$  vektor gravitacijske sile u koordinatnom sustavu Zemlje,  $\mathbf{0}_{3 \times 1}$  vertikalni nul vektor i  $\mathbf{R}_{\Theta}$  ortogonalna matrica. [10]

Drugi pridonos uzima u obzir žiroskopske efekte koji su nastali rotacijom propelera. Kako se dva propelera vrte u smjeru kazaljke na satu, a dva se vrte u obrnutom smjeru, može doći do disbalansa ako algebarska suma brzina propelera nije jednaka nuli. Ako se uz to dogodi da su brzine valjanja i poniranja različite od nule, na kvadkopter utječu momenti koji su prikazani u jednadžbi (3.28).

$$\begin{aligned}
\mathbf{O}_B(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\Omega} &= \left[ -\sum_{k=1}^4 J_{TP} \left( \boldsymbol{\omega}^B \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) (-1)^k \Omega_k \right] = \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ J_{TP} \begin{bmatrix} -q \\ p \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} = J_{TP} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & -q & q & -q \\ -p & p & -p & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} \quad (3.28)
\end{aligned}$$

$\mathbf{O}_B(\boldsymbol{\nu})$  je matrica žiroskopskih efekata, a  $J_{TP}$  je ukupni okretni moment inercije propelera. Iz jednadžbe (3.28) se vidi da su žiroskopski efekti produkt rotacije propelera, stoga su povezane kutnim jednadžbama, a ne linearnim. [10]

Jednadžbom (3.29) definirane su brzine  $\Omega$  i vektor brzine propelera  $\boldsymbol{\Omega}$  korištenih u jednadžbi (3.28)

$$\Omega = -\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4, \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \\ \Omega_4 \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

gdje je  $\Omega_1$  brzina prednjeg propelera,  $\Omega_2$  brzina desnog propelera,  $\Omega_3$  brzina zadnjeg propelera i  $\Omega_4$  brzina lijevog propelera. [10]

Treći pridonos uzima u obzir sile i momente koji su proizvedeni upravljanjem kvadrokoptera. Sa stajališta aerodinamike, poznato je da su sile i momenti proporcionalni kvadratu brzine propelera, stoga matricu pokreta  $\mathbf{E}_B$  množimo s  $\boldsymbol{\Omega}^2$  kako bi dobili vektor pokreta  $\mathbf{U}_B(\boldsymbol{\Omega})$ .

Jednadžba (3.30) prikazuje utjecaj vektora pokreta na dinamiku kvadrokoptera

$$\mathbf{U}_B(\boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{E}_B \boldsymbol{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ bl(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) \\ bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \\ d(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2) \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

gdje je  $l$  udaljenost između središta kvadrokoptera i središta propelera,  $b$  faktor potiska i  $d$  faktor prigušenja. Izraz momenta koji proizvodi  $U_4$  je pojednostavljen zanemarivanjem komponente  $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$  tako da su izrazi slični i jednostavniji za kontrolirati. [10]

Iz jednadžbe (3.30) moguće je dobiti konstantnu matricu  $\mathbf{E}_B$  koja je prikazana jednadžbom (3.31).

$$\mathbf{E}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & b & b & b \\ 0 & -bl & 0 & bl \\ -bl & 0 & bl & 0 \\ -d & d & -d & d \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Pomoću (3.23) moguće je opisati dinamiku kvadrokoptera uzimajući u obzir tri međudnosa te se dobiva.

$$\mathbf{M}_B \dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{C}_B(\boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu} = \mathbf{G}_B(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{O}_B(\boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{E}_B \boldsymbol{\Omega}^2 \quad (3.32)$$

Jednadžbu (3.32) možemo zapisati tako da izoliramo općenitu brzinu u koordinatnom sustavu tijela  $\dot{\boldsymbol{\nu}}$ .

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{M}_B^{-1}(-\mathbf{C}_B(\boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu} + \mathbf{G}_B(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{O}_B(\boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{E}_B \boldsymbol{\Omega}^2) \quad (3.33)$$

Ako prethodnu jednadžbu zapišemo kao sustav jednadžbi dobivamo

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= (vr + wq) + gs_\theta, \\
 \dot{v} &= (wp + ur) - gc_\theta s\phi, \\
 \dot{w} &= (uq + vp) - gc_\theta s\phi + \frac{U_1}{m}, \\
 \dot{p} &= \frac{I_{YY} - I_{ZZ}}{I_{XX}}qr + \frac{J_{TP}}{I_{XX}}q\Omega + \frac{U_2}{I_{XX}}, \\
 \dot{q} &= \frac{I_{ZZ} - I_{XX}}{I_{YY}}pr + \frac{J_{TP}}{I_{YY}}p\Omega + \frac{U_3}{I_{YY}}, \\
 \dot{r} &= \frac{I_{XX} - I_{YY}}{I_{ZZ}}pq + \frac{U_4}{I_{ZZ}},
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

gdje su brzine propelera dane jednadžbama [10]

$$\begin{aligned}
 U_1 &= b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2), \\
 U_2 &= bl(\Omega_4^2 - \Omega_2^2), \\
 U_3 &= bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2), \\
 U_4 &= d(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2), \\
 \Omega &= -\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4.
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Dinamika kvadrokoptera u jednadžbi (3.34) zapisana je u koordinatnom sustavu tijela. Ovaj zapis se primjenjuje za većinu krutih tijela sa šest stupnjeva slobode gibanja. U ovom slučaju korisno je dinamiku sustava zapisati u hibridnom sustavu koji se sastoji od linearnih jednadžbi u koordinatnom sustavu Zemlje i kutnih jednadžbi u koordinatnom sustavu tijela, što ćemo sada prikazati. Jednadžbom (3.36) prikazan je općeniti vektor brzine u hibridnom koordinatnom sustavu

$$\boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}^E & \boldsymbol{\omega}^B \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \dot{X} & \dot{Y} & \dot{Z} & p & q & r \end{bmatrix}^T. \tag{3.36}$$

Dinamiku sustava u hibridnom koordinatnom sustavu zapisat ćemo kao

$$\mathbf{M}_H \dot{\boldsymbol{\zeta}} + \mathbf{C}_H(\boldsymbol{\zeta})\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{G}_H + \mathbf{O}_H(\boldsymbol{\zeta})\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{E}_H(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\Omega}^2, \tag{3.37}$$

gdje je  $\dot{\boldsymbol{\zeta}}$  vektor općenitog ubrzanja kvadrotora u hibridnom koordinatnom sustavu. Sada treba sve matrice koje se koriste u jednadžbi (3.37) prikazati u odnosu na hibridni



koordinatni sustav. Inercijska matrica sustava  $\mathbf{M}_H$  u hibridnom koordinatnom sustavu ostaje nepromijenjena u odnosu na onu u koordinatnom sustavu tijela  $\mathbf{M}_B$  koja je gore navedena jednađbom (3.24). [10]

Nadalje, Coriolis-ova centripetalna matrica u hibridnom koordinatnom sustavu  $\mathbf{C}_H(\boldsymbol{\zeta})$  nije jednaka onoj u koordinatnom sustavu tijela te je prikazana kao

$$\mathbf{C}_H(\boldsymbol{\zeta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{S}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{ZZ}r & -I_{YY}q \\ 0 & 0 & 0 & -I_{ZZ}r & 0 & I_{XX}p \\ 0 & 0 & 0 & I_{YY}q & -I_{XX}p & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Ni gravitacijski vektor ne ostaje isti u odnosu na hibridni koordinatni sustav  $\mathbf{G}_H$  te ga prikazemo kao

$$\mathbf{G}_H = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_G^E \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Žiroskopski efekt koji propeleri proizvode svojom vrtnjom ostaje nepromijenjen, jer promjena koordinatnih sustava utječe samo na kutne jednađbe, a matricu žiroskopskih efekata  $\mathbf{O}_H(\boldsymbol{\zeta})$  definirana jednađbom (3.28). Matrica pokreta u odnosu na hibridni koordinatni sustav  $\mathbf{E}_H(\boldsymbol{\xi})$  se razlikuje od one prikazane u odnosu na koordinatni sustav tijela  $\mathbf{E}_B$ , zato što  $U_1$  utječe na sve tri linearne komponente preko matrice rotacije  $\mathbf{R}_\theta$ . Umnožak matrice pokreta i vektora kvadrata brzina propelera prikazan je jednađbom

$$\mathbf{E}_H(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\Theta & bm\mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{E}_B\boldsymbol{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} (s_\psi s_\phi + c_\psi s_\theta c_\phi)U_1 \\ (-c_\psi s_\phi + s_\psi s_\theta c_\phi)U_1 \\ (c_\theta c_\phi)U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Izražavanjem derivacije vektora općenite brzine iz jednadžbe (3.37) dobivamo vektor općenite brzine u odnosu na hibridni koordinatni sustav  $\dot{\zeta}$ .

$$\dot{\zeta} = \mathbf{M}_H^{-1}(-\mathbf{C}_H(\zeta)\zeta + \mathbf{G}_H + \mathbf{O}_H(\zeta)\Omega + \mathbf{E}_H(\xi)\Omega^2) \quad (3.41)$$

Zapišemo li jednadžbu (3.41) kao sustav jednadžbi, dobivamo [10]

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= (\cos(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi) + \sin(\psi) \sin(\phi)) \frac{U_1}{m}, \\ \ddot{Y} &= (\sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi) + \cos(\psi) \sin(\phi)) \frac{U_1}{m}, \\ \ddot{Z} &= -g + (\cos(\phi) \cos(\theta)) \frac{U_1}{m}, \\ \dot{p} &= \frac{I_{YY} - I_{ZZ}}{I_{XX}} qr - \frac{J_{TP}}{I_{XX}} q\Omega + \frac{U_2}{I_{XX}}, \\ \dot{q} &= \frac{I_{ZZ} - I_{XX}}{I_{YY}} pr + \frac{J_{TP}}{I_{YY}} p\Omega + \frac{U_3}{I_{YY}}, \\ \dot{r} &= \frac{I_{XX} - I_{YY}}{I_{ZZ}} pq + \frac{U_4}{I_{ZZ}}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

### 3.5. Linearizacija modela

Dinamički model kvadkoptera prikazan je idućim diferencijalnim jednažbama

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= (\cos(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi) + \sin(\psi) \sin(\phi))u_1, \\
 m\ddot{y} &= (\sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi) + \cos(\psi) \sin(\phi))u_1, \\
 m\ddot{z} &= -mg + \cos(\phi) \cos(\theta)u_1, \\
 I_{XX}\ddot{\phi} &= (I_{YY} - I_{ZZ})\dot{\theta}\dot{\psi} + u_2, \\
 I_{YY}\ddot{\theta} &= (I_{ZZ} - I_{XX})\dot{\phi}\dot{\psi} + u_3, \\
 I_{ZZ}\ddot{\psi} &= (I_{XX} - I_{YY})\dot{\phi}\dot{\theta} + u_4,
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

gdje su  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  Eulerovi kutevi,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  pozicije centra mase u inercijalnom koordinatnom sustavu,  $u_1$  okomita sila u sustavu krutog tijela i  $u_2$ ,  $u_3$ ,  $u_4$  momenti oko glavnih osi krutog tijela.

Kako bi mogli iskoristiti linearni regulator, potrebno je linearizirati ovaj nelinearni model. Lineariziramo model uz pretpostavku malih kuteva

$$\begin{aligned}
 \cos(w) &\sim 1, \\
 \sin(w) &\sim w.
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Kada iskoristimo pretpostavku (3.44) u sustavu diferencijalnih jednažbi (3.43) dobivamo

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= (\theta + \psi\phi)u_1, \\
 m\ddot{y} &= (\psi\theta + \phi)u_1, \\
 m\ddot{z} &= -mg + u_1, \\
 I_{XX}\ddot{\phi} &= (I_{YY} - I_{ZZ})\dot{\theta}\dot{\psi} + u_2, \\
 I_{YY}\ddot{\theta} &= (I_{ZZ} - I_{XX})\dot{\phi}\dot{\psi} + u_3, \\
 I_{ZZ}\ddot{\psi} &= (I_{XX} - I_{YY})\dot{\phi}\dot{\theta} + u_4.
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Zanemarimo li kvadratične članove malih kuteva i brzina, dobivamo

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= \theta u_1, \\
 m\ddot{y} &= \phi u_1, \\
 m\ddot{z} &= -mg + u_1, \\
 I_{XX}\ddot{\phi} &= u_2, \\
 I_{YY}\ddot{\theta} &= u_3, \\
 I_{ZZ}\ddot{\psi} &= u_4.
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Moramo eliminirati konstantan član  $-mg$  iz jednadžbe  $m\ddot{z} = -mg + u_1$ . Kako bi eliminirali taj član koristimo unaprijednu kompenzaciju  $u_1 = mg + \tilde{u}_1$  i dobivamo

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= mg\theta - \theta\tilde{u}_1, \\
 m\ddot{y} &= -mg\phi - \phi\tilde{u}_1, \\
 m\ddot{z} &= \tilde{u}_1,
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

gdje su  $\theta\tilde{u}_1 \simeq 0$  i  $\phi\tilde{u}_1 \simeq 0$ . Time smo dobiva potpuno linearizirani model

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} &= g\theta, \\
 \ddot{y} &= -g\phi, \\
 \ddot{z} &= \frac{1}{m}\tilde{u}_1, \\
 \ddot{\phi} &= \frac{1}{I_{XX}}u_2, \\
 \ddot{\theta} &= \frac{1}{I_{YY}}u_3, \\
 \ddot{\psi} &= \frac{1}{I_{ZZ}}u_4.
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

## 4 | Upravljanje s kompenzacijom poremećaja

Za implementaciju observera poremećaja i slijeđenje trajektorije neće biti korišten puni model kvadrokoptera, već samo  $x$ -os. Diferencijalne jednačbe koje opisuju ponašanje kvadrokoptera u  $x$ -osi su

$$\ddot{x} = g\theta + \frac{1}{m}d_1, \quad (4.1)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I_{YY}}u_3 + \frac{1}{I_{YY}}d_2. \quad (4.2)$$

Cilj upravljanja je slijeđenje željene trajektorije  $x_d(t)$ , a grešku slijeđenja definiramo jednačbom

$$\tilde{x} = x - x_d(t). \quad (4.3)$$

Greška slijeđenja  $\tilde{x}$  se stabilizira kontrolnom varijablom  $u_3$ , pošto jednačba (4.1) ovisi samo o  $\theta$ . Jednačba pogreške drugog reda definirana je kao

$$\ddot{\tilde{x}} = -\ddot{x}_d + g\theta + \frac{1}{m}d_1. \quad (4.4)$$

Moramo dva puta derivirati jednačbu (4.4) kako bi se upravljačka varijabla  $u_3$  pojavila eksplicitno. Primjenom derivacija dobiva se

$$\tilde{x}^{(4)} = -x_d^{(4)} + g\ddot{\theta} + \frac{1}{m}\ddot{d}_1. \quad (4.5)$$

Uvrštavanjem (4.2) u (4.5) dobivamo

$$\tilde{x}^{(4)} = -x_d^{(4)} + \frac{g}{I_{YY}}(u_3 + d_2) + \frac{1}{m}\ddot{d}_1. \quad (4.6)$$

Poremećaji se mogu zbrojiti u jedan zajednički poremećaj te dobivamo

$$d = \frac{g}{I_{YY}}d_2 + \frac{1}{m}\ddot{d}_1. \quad (4.7)$$

Sada kada imam eksplicitno pojavljivanje upravljačke varijable  $u_3$  u dinamičkoj jednadžbi pogreške. Izborom upravljačke varijable

$$u_3 = \frac{I_{YY}}{g}(x_d^{(4)} - K_3\ddot{\tilde{x}} - K_2\ddot{\tilde{x}} - K_1\dot{\tilde{x}} - K_0\tilde{x}) - d, \quad (4.8)$$

dobivamo konačnu dinamiku pogreške

$$\tilde{x}^{(4)} + K_3\ddot{\tilde{x}} + K_2\ddot{\tilde{x}} + K_1\dot{\tilde{x}} + K_0\tilde{x} = 0. \quad (4.9)$$

Uvrštavanjem  $\tilde{x} = x - x_d$ ,  $\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{x}_d$ ,  $\ddot{\tilde{x}} = \ddot{x} - \ddot{x}_d$ ,  $\ddot{\tilde{x}} = \ddot{x} - \ddot{x}_d$  u (4.8) dobivamo

$$u_3 = \frac{I_{YY}}{g}(x_d^{(4)} - K_3(\ddot{x} - \ddot{x}_d) - K_2(\ddot{x} - \ddot{x}_d) - K_1(\dot{x} - \dot{x}_d) - K_0(x - x_d)) - d. \quad (4.10)$$

Pošto su mjerljivi samo položaj i brzina, ostale varijable stanja kod observera poremećaja u vremenskoj domeni i robusnog observera poremećaja potrebno je estimirati pomoću filtera za estimaciju derivacija (engl. *Dirty derivative filter*) koji ima oblik

$$\dot{y} = -K_f(y - x), \quad (4.11)$$

gdje je  $\dot{y}$  estimirana derivacija,  $y$  estimirana vrijednost varijable stanja i  $x$  sama varijabla stanja. Navedeni filteri za estimaciju derivacija imaju ograničenu točnost na koju nije moguće utjecati povećanjem pojačanja filtera. Umjesto navedenih filtera, moguće je također primijeniti filtere koji omogućuju proizvoljnu točnost proizvoljnog broja derivacija signala. [12]

## 4.1. Observer poremećaja u vremenskoj domeni

Kako bi upravljali ovim sustavom moramo imati dva podsustava. Prvi podsustav će se koristiti za estimaciju poremećaja, dok će se drugi podsustav koristiti za kompenzaciju poremećaja i slijeđenje trajektorije.

### 4.1.1. Podsustav za estimaciju poremećaja

Kada se sustav zadan jednačbama (4.1) i (4.2) zapiše u prostoru stanja dobivamo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= gx_3 + \frac{1}{m}d_1, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{I_{YY}}u_3 + \frac{1}{I_{YY}}d_2.\end{aligned}\tag{4.12}$$

Oblik sustava jednačbi (4.12) u matričnom zapisu bit će

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_u u_3 + \mathbf{B}_d \mathbf{d},\tag{4.13}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_{YY}} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{YY}} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix},$$

gdje su  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}_u$ ,  $\mathbf{B}_d$  redom matica sustava, vektor ulaza sustava i matrica poremećaja sustava te  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{d}$  vektori stanja i vektor poremećaja redom. Za samu estimaciju upravljačke varijable  $u_3$ , dane jednačbom (4.10), nije potrebna kompenzacija poremećaja te se ona izbacuje iz jednačbe. Tada će upravljačka varijabla  $u_3$  biti oblika

$$u_3 = \frac{I_{YY}}{g}(x_d^{(4)} - K_3(\ddot{x} - \ddot{x}_d) - K_2(\ddot{x} - \ddot{x}_d) - K_1(\dot{x} - \dot{x}_d) - K_0(x - x_d)).\tag{4.14}$$

Pojaćanja upravljaćke varijable dobivena su metodom namještanja polova te su  $K_0 = 120$ ,  $K_1 = 154$ ,  $K_2 = 71$ ,  $K_3 = 14$ . Observer poremećaja u prostoru stanja prikazan je jednađbom (2.2)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= -\mathbf{L}\mathbf{B}_d(\mathbf{z} + \mathbf{L}\mathbf{x}) - \mathbf{L}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_u u_3), \\ \hat{\mathbf{d}} &= \mathbf{z} + \mathbf{L}\mathbf{x},\end{aligned}\tag{4.15}$$

$$\mathbf{L} = K_l \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \hat{d}_1 \\ \hat{d}_2 \end{bmatrix},$$

gdje je  $\mathbf{z}$  unutarnji vektor stanja observera,  $\mathbf{L}$  matrica pojaćanja observera i  $\hat{\mathbf{d}}$  vektor estimiranih poremećaja. Matrica pojaćanja observera se proizvoljno odabire s tim da mora zadovoljiti uvjet da je  $-\mathbf{L}\mathbf{B}_d$  stabilno po Hurvitz-u.

#### 4.1.2. Podsustav za kompenzaciju poremećaja

Jednađbu (4.1) deriviramo dva puta po vremenu te dobivamo

$$x^{(4)} = g\ddot{\theta} + \frac{1}{m}\ddot{d}_1.\tag{4.16}$$

Uvrštavanjem (4.2) u (4.16) dobivamo

$$x^{(4)} = \frac{g}{I_{YY}}u_3 + \frac{g}{I_{YY}}d_2 + \frac{1}{m}\ddot{d}_1.\tag{4.17}$$

Sustav prebacimo u prostor stanja uz iduće varijable stanja  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$ ,  $x_3 = \ddot{x}$ ,  $x_4 = \dddot{x}$  te ga zapišemo u matičnom obliku

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_u u_3 + \mathbf{B}_d \mathbf{d},\tag{4.18}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{g}{I_{YY}} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dddot{x} \end{bmatrix},$$

gdje je  $\mathbf{A}$  matrica sustava,  $\mathbf{B}_u$  vektor ulaza sustava,  $\mathbf{B}_d$  vektor poremećaja sustava i  $d$  kumulativni poremećaj dvaju poremećaja koji djeluju na sustav te je prikazan idućom jednađbom

$$d = \frac{g}{I_{YY}}d_2 + \frac{1}{m}\ddot{d}_1.\tag{4.19}$$



Upravljačka varijabla  $u_3$  dana je jednadžbom (4.10). Kao i u prvom podsustavu pojačanja su dobivena metodom namještanja polova te iznose  $K_0 = 120$ ,  $K_1 = 154$ ,  $K_2 = 71$ ,  $K_3 = 14$ . Observer poremećaja u prostoru stanja prikazan je jednadžbom (2.2)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= -\mathbf{L}\mathbf{B}_d(\mathbf{z} + \mathbf{L}\mathbf{x}) - \mathbf{L}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_u u_3), \\ \hat{d} &= \mathbf{z} + \mathbf{L}\mathbf{x},\end{aligned}\tag{4.20}$$

$$\mathbf{L} = Kl \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

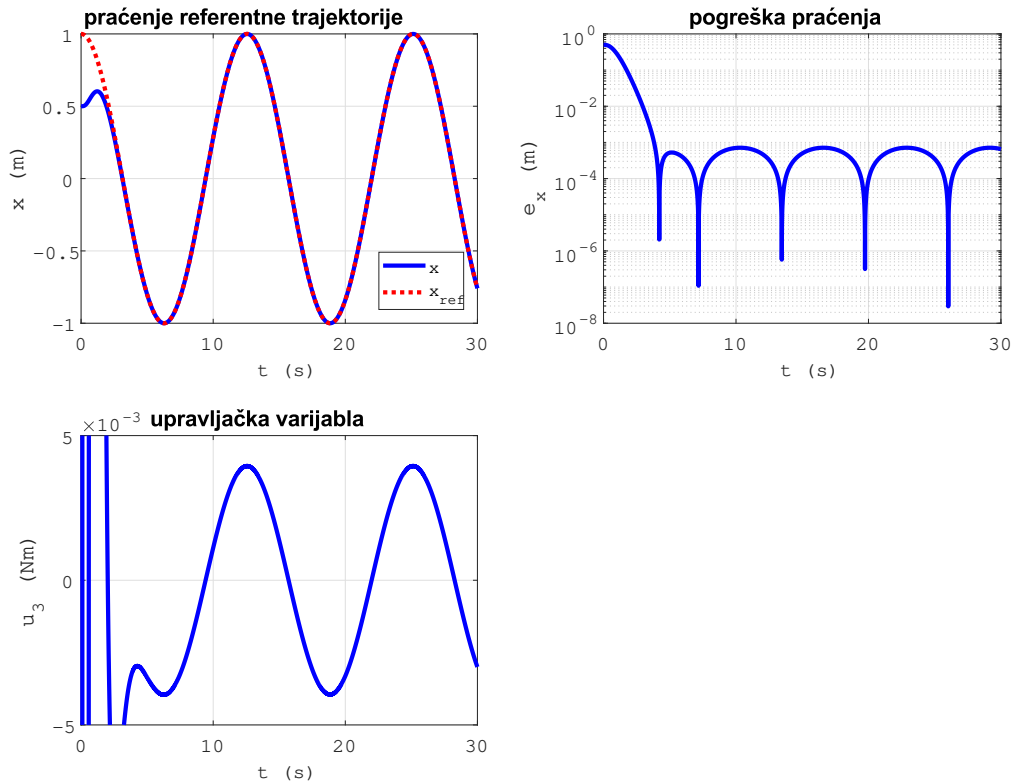
gdje je  $\mathbf{z}$  unutarnji vektor stanja observera,  $\mathbf{L}$  vektor pojačanja observera i  $\hat{d}$  estimirani poremećaj. Matrica pojačanja observera se proizvoljno odabire time da mora zadovoljavati uvjet da je  $-\mathbf{L}\mathbf{B}_d$  stabilno po Hurvitz-u.

#### 4.1.3. Primjeri za observer poremećaja u vremenskoj domeni

U ovim primjerima koristit će se podsustav za estimaciju poremećaja i podsustav za kompenzaciju poremećaja. Korištene vrijednosti u modelu kvadkoptera su  $g = 9.81\text{m/s}^2$ ,  $I_{YY} = 0.62\text{m}^4$ ,  $m = 1\text{kg}$ . Trajektorija koju kvadkopter prati zadana je formulom  $x_d = \cos(0.5t)$  uz zadani početni uvjet  $x_0 = 0.5\text{m}$ , dok su svi ostali početni uvjeti jednaki nuli.

### Primjer 1 - praćenje trajektorije bez poremećaja

Prvi primjer nam pokazuje kako kvadkopter radi u slučaju leta bez poremećaja ( $d = 0$ ), gdje je zadana referenca položaja  $x_d = \cos(0.5t)$ .



Slika 4.1: Praćenje referentne trajektorije bez prisustva poremećaja.

Na slici 4.1 može se primijetiti da položaj kvadkoptera uhvati referencu položaja oko treće sekunde te nakon tog trenutka ju slijedi bez pogreške. U prve tri sekunde imamo pogrešku zato što se početni uvjeti ne poklapaju s referentnom trajektorijom u nultoj sekundi.

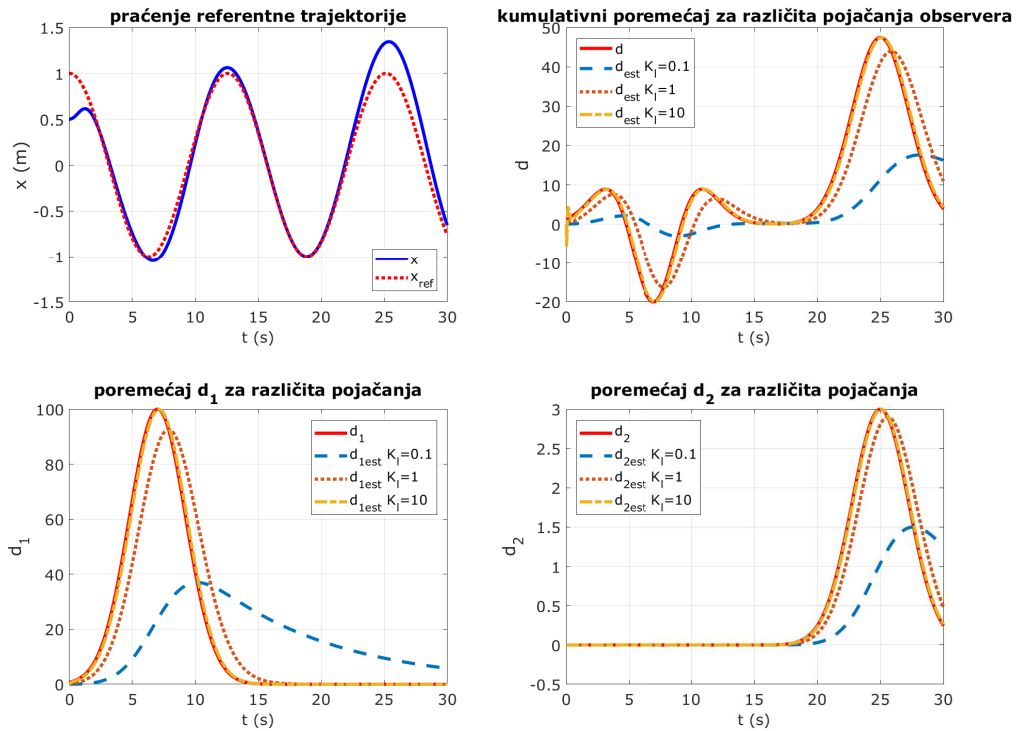
## Primjer 2 - praćenje trajektorije s poremećajem bez kompenzacije poremećaja

Drugi primjer će pokazati kako poremećaj utječe na kvadkopter u slučaju kada nemamo mehanizam za kompenzaciju tog poremećaja. Korišteni poremećaji su naleti vjetra zadani Gausovim funkcijama oblika

$$\begin{aligned} d_1 &= 100e^{-0.1(t-7)^2}, \\ d_2 &= 3e^{-0.1(t-25)^2}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Kod observera poremećaja imamo matricu pojačanja observera  $\mathbf{L}$  koja je jednaka

$$\mathbf{L} = K_l \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



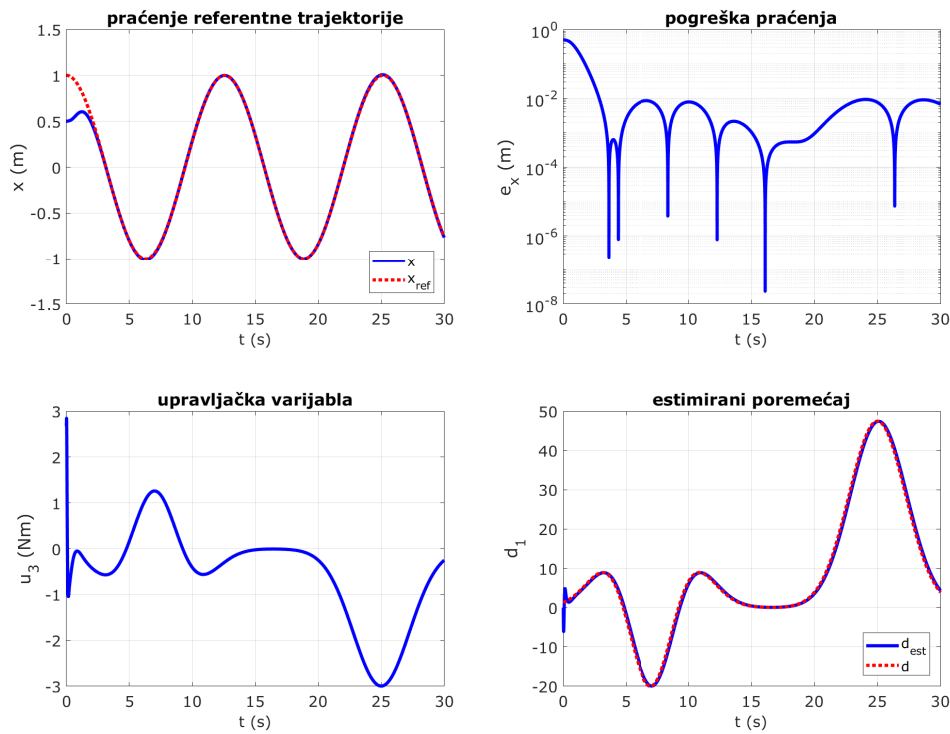
Slika 4.2: Praćenje referentne trajektorije s poremećajem bez kompenzacije poremećaja.

Na slici 4.2 je vidljivo da položaj kvadkoptera prati referencu prije i nakon poremećaja. U vremenskom periodu gdje djeluje poremećaj očekivano je odstupanje od reference.

Poremećaj je estimiran za tri različita pojačanja observera. Za pojačanje od  $K_l = 0.1$  je odstupanje estimiranog poremećaja i stvarnog poremećaja prevelika. Kod pojačanja  $K_l = 1$  je odstupanje estimiranog poremećaja i stvarnog poremećaja prihvatljiva, dok se za pojačanje od  $K_l = 10$  estimirani poremećaj poklapa sa samim poremećajem te je pogodan za kompenzaciju istoga.

### Primjer 3 - praćenje trajektorije s poremećajem i kompenzacijom poremećaja

U trećem primjeru je prikazano upravljanje kvadkopterom gdje imamo utjecaj poremećaja koji je prikazan jednadžbom (4.21) te imamo poništavanje istoga. Za pojačanje observera uzeto je  $K_l = 10$ .

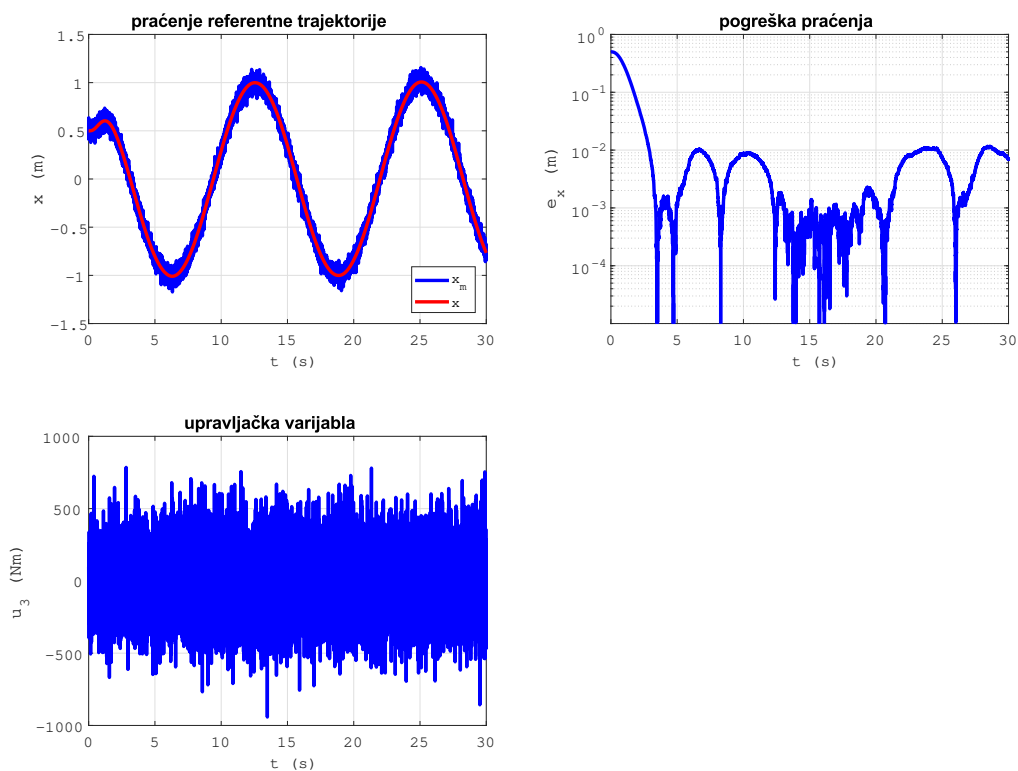


Slika 4.3: Praćenje referentne trajektorije s poremećajem i kompenzacijom poremećaja.

Na slici 4.3 je vidljivo da položaj kvadkoptera prati zadanu referencu tijekom cijelog intervala. Kada poremećaj počne djelovati upravljačka varijabla ga poništi te nema odstupanja od referentne trajektorije.

### Primjer 4 - praćenje trajektorije s poremećajem i kompenzacijom poremećaja uz šum mjerenja

U četvrtom primjeru prikazano je upravljanje kvadkopterom sa šumom u mjerenim varijablama  $x_m(t) = x(t) + 0.1\xi(t)$  i  $\dot{x}_m(t) = \dot{x}(t) + 0.03\xi(t)$ , gdje je  $\xi(t)$  Gauss-ov šum standardne normalne distribucije  $N(0, 1)$ . Amplituda šuma je oko 10% amplitude samog mjerenog signala.

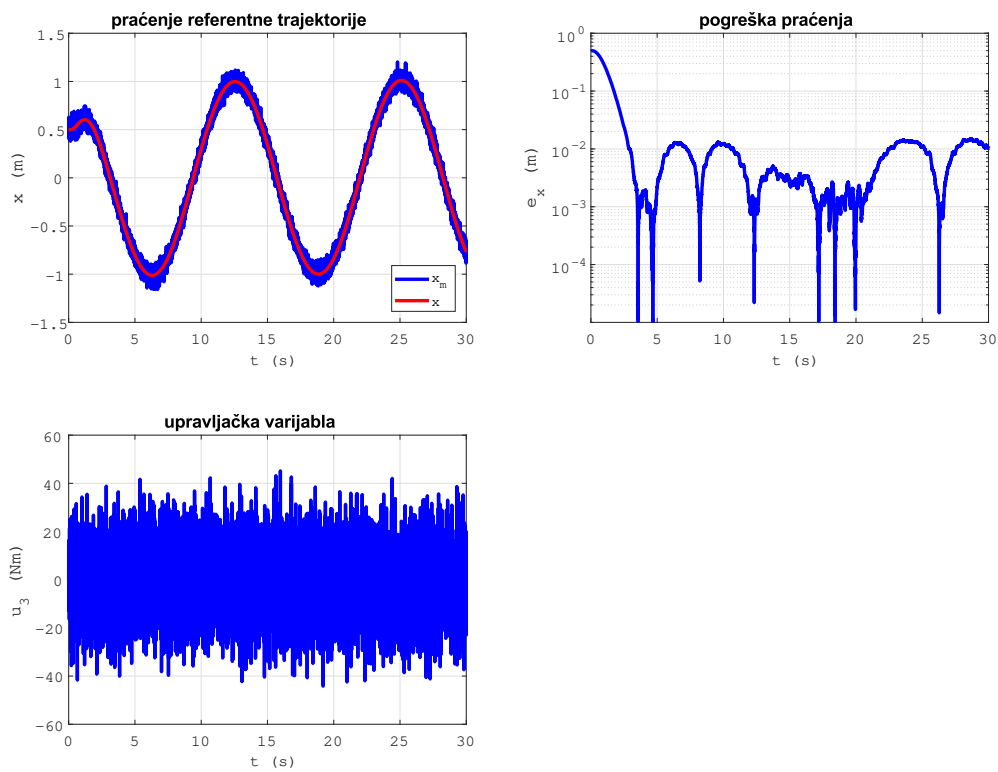


Slika 4.4: Praćenje referentne trajektorije s poremećajem i kompenzacijom poremećaja uz šum mjerenja.

Na slici 4.4 vidljivo je da položaj kvadkoptera prati zadanu referencu bez obzira na šum mjerenja koji je vidljiv na mjerenoj varijabli  $x_m$ . Zbog šuma mjerenja dolazi do pada točnosti slijeđenja trajektorije i velikih oscilacija kod upravljačke varijable.

### Primjer 5 - praćenje trajektorije s poremećajem i kompenzacijom poremećaja uz šum mjerenja s filtriranom upravljačkom varijablom

Kako bi se smanjila amplituda oscilacija upravljačke varijable, u ovom primjeru upravljačka varijabla će se filtrirati te će se koristiti za upravljanje. Filtrirana upravljačka varijabla ima oblik  $\dot{u}_f = -K_f(u_f - u)$ , gdje je  $K_f$  pojačanje filtera,  $u_f$  filtrirana upravljačka varijabla te  $u$  upravljačka varijabla. U ovom primjeru uzeto  $K_f = 20$ .



Slika 4.5: Praćenje referentne trajektorije s poremećajem i kompenzacijom poremećaja uz šum mjerenja s filtriranom upravljačkom varijablom.

Na slici 4.5 je vidljivo da upravljačka varijabla ima manje oscilacije nego u prethodnom primjeru. Zbog filtriranja upravljačke varijable dolazi do pada točnosti.

## 4.2. Observer poremećaja s proširenim prostorom stanja

### 4.2.1. Definiranje sustava

Jednadžbu (4.1) deriviramo 2 puta po vremenu te dobivamo

$$x^{(4)} = g\ddot{\theta} + \frac{1}{m}\ddot{d}_1. \quad (4.22)$$

Uvrštavanjem (4.2) u (4.16) dobivamo

$$x^{(4)} = \frac{g}{I_{YY}}u_3 + \frac{g}{I_{YY}}d_2 + \frac{1}{m}\ddot{d}_1. \quad (4.23)$$

Sustav prebacimo u prostor stanja uz iduće varijable stanja  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$ ,  $x_3 = \ddot{x}$ ,  $x_4 = \ddot{\ddot{x}}$  te dobivamo

$$\begin{aligned} x_1 &= x, \\ \dot{x}_1 &= x_2 = \dot{x}, \\ \dot{x}_2 &= x_3 = \ddot{x}, \\ \dot{x}_3 &= x_4 = \ddot{\ddot{x}}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\dot{x}_4 = x^{(4)} = \frac{g}{I_{YY}}u_3 + \frac{g}{I_{YY}}d_2 + \frac{1}{m}\ddot{d}_1,$$

$$y = x_1.$$

Zatim se prostor stanja iz jednadžbe (4.24) proširi za jednu varijablu stanja. U novu varijablu stanja prebacimo poremećaj te dobivamo sustav

$$\begin{aligned} x_1 &= x, \\ \dot{x}_1 &= x_2 = \dot{x}, \\ \dot{x}_2 &= x_3 = \ddot{x}, \\ \dot{x}_3 &= x_4 = \ddot{\ddot{x}}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\dot{x}_4 = x^{(4)} = x_5 + \frac{g}{I_{YY}}u_3,$$

$$\dot{x}_5 = \frac{g}{I_{YY}}\dot{d}_2 + \frac{1}{m}\ddot{\ddot{d}}_1,$$

$$y = x_1.$$

Ako taj sustav zapišemo u matričnom obliku dobivamo

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_u u_3 + \mathbf{B}_d d, \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x},\end{aligned}\tag{4.26}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{g}{I_{YY}} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gdje je  $\mathbf{A}$  proširena matrica sustava,  $\mathbf{B}_u$  prošireni vektor ulaza sustava,  $\mathbf{B}_d$  prošireni vektor poremećaja sustava,  $\mathbf{x}$  prošireni vektor stanja i  $d$  kumulativni poremećaj dvaju poremećaja koji djeluju na sustav prikazan idućom jednačbom

$$d = \frac{g}{I_{YY}}\dot{d}_2 + \frac{1}{m}\ddot{d}_1.\tag{4.27}$$

Kako bi estimirali i kasnije kompenzirali poremećaj, koristimo prošireni observer stanja u matričnom zapisu

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{L}\mathbf{C}(\mathbf{z} - \mathbf{x}) + \mathbf{B}_u u_3,\tag{4.28}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 5w \\ 10w^2 \\ 10w^3 \\ 5w^4 \\ w^5 \end{bmatrix},\tag{4.29}$$

gdje je  $\mathbf{L}$  vektor pojačanja proširenog observera stanja,  $\mathbf{z}$  vektor stanja proširenog observera stanja koji estimira sva stanja sustava i proširenu varijablu stanja u kojoj se nalazi estimirani poremećaj. Varijabla  $w$  koja se koristi u vektoru pojačanja proširenog observera stanja odabire se proizvoljno uz uvjet da je  $w > 0$ . Ovisno o pojačanju observera, estimirani vektor stanja će imati manju ili veću estimacijsku pogrešku. [13]

Za kompenzaciju pogreške koristimo upravljačku varijablu iz jednačbe (4.8), gdje sve varijable stanja sustava kao i pogrešku zamijenimo njihovim estimiranim vrijednostima te dobivamo

$$u_3 = \frac{I_{YY}}{g}(x_d^{(4)} - K_3(z_4 - \ddot{x}_d) - K_2(z_3 - \ddot{x}_d) - K_1(z_2 - \dot{x}_d) - K_0(z_1 - x_d)) - z_5).\tag{4.30}$$



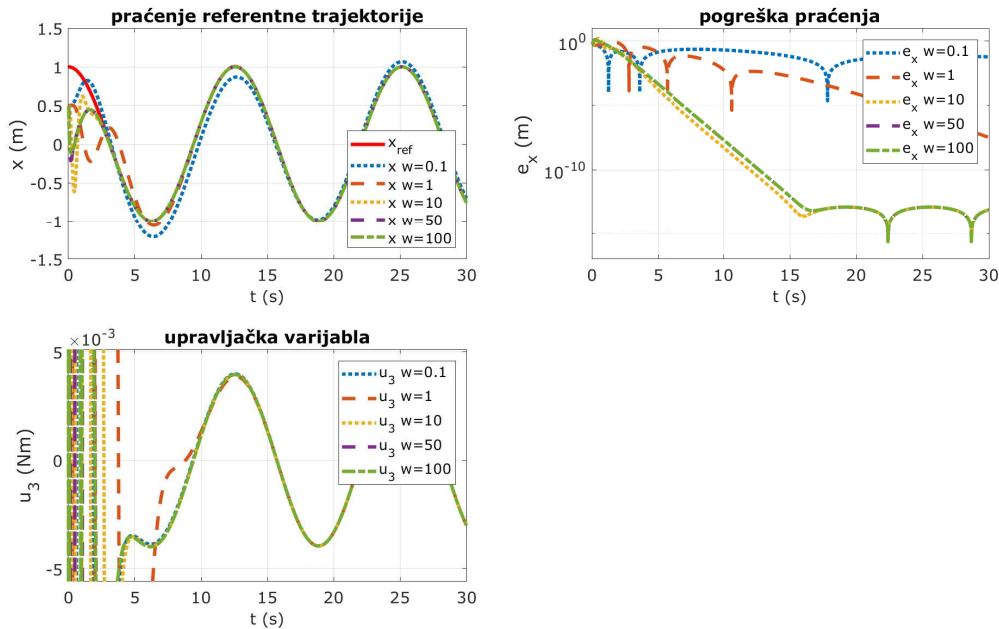
### 4.2.2. Primjeri za observer poremećaja s proširenim prostorom stanja

U ovim primjerima koristit će se sustav iz prošlog poglavlja. Korištene vrijednosti u modelu kvadkoptera su  $g = 9.81\text{m/s}^2$ ,  $I_{YY} = 0.62\text{m}^4$ ,  $m = 1\text{kg}$ . Sama trajektorija koju kvadkopter prati dana je formulom  $x_d = \cos(0.5t)$  uz početni uvjet  $x_0 = 0.5\text{m}$ , a ostali početni uvjeti jednaki su nuli.

#### Primjer 1 - praćenje trajektorije bez poremećaja

Prvi primjer nam pokazuje kako kvadkopter radi u slučaju leta bez poremećaja ( $d = 0$ ) sa zadanom referencom položaja  $x_d = \cos(0.5t)$ .

U ovom primjeru provjerit će se praćenje trajektorije za različita pojačanja observera, zato što je u upravljačkoj varijabli danoj jednadžbom (4.30) potrebno imati estimirane varijable stanja. Vektor pojačanja prikazan je u (4.29) s jedinim promjenjivim koeficijentom  $w$ .



Slika 4.6: Praćenje referentne trajektorije bez prisustva poremećaja.

Na slici 4.6 vidimo da se sustav za pojačanja observera s koeficijentom  $w = 0.1$  ne poklapa s referentnom trajektorijom, dok za koeficijent  $w = 1$  položaj jako sporo konvergira

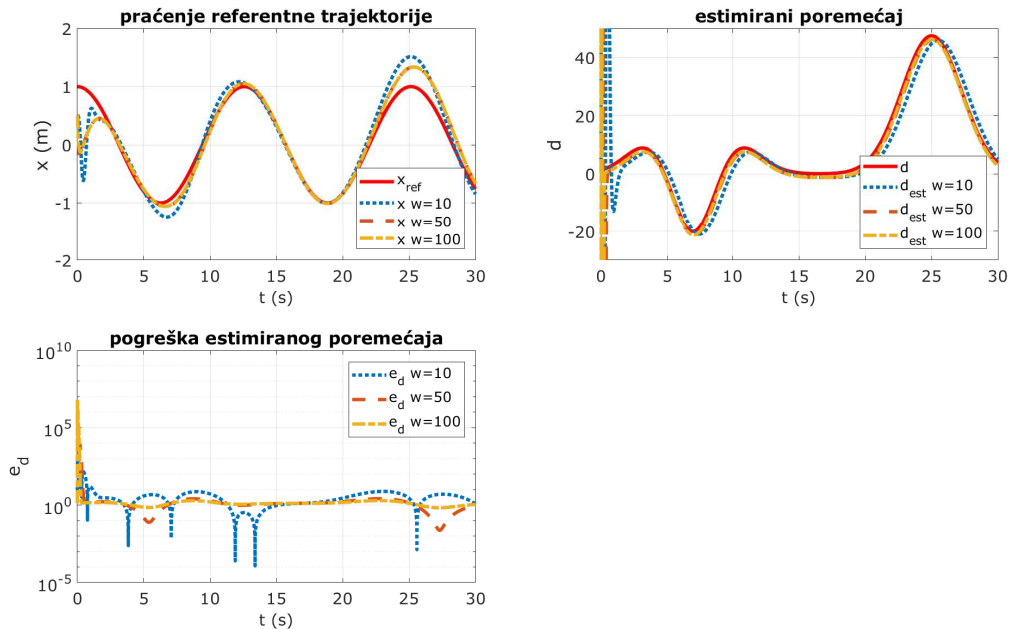
prema referenci te pojačanje nije pogodno za upravljanje. Odzivi dobiveni pojačanjima za koeficijente  $w = 10$ ,  $w = 50$  i  $w = 100$  su pogodni za upravljanje kvadkopterom bez prisustva poremećaja.

## Primjer 2 - praćenje trajektorije s poremećajem bez kompenzacije poremećaja

U ovom primjeru ćemo pokazati kako sami poremećaj utječe na kvadkopter u slučaju kada nemamo mehanizam za kompenzaciju tog poremećaja. Kao i u prethodnom primjeru, korišteni poremećaji su naleti vjetra zadani Gausovim funkcijama oblika

$$\begin{aligned} d_1 &= 100e^{-0.1(t-7)^2}, \\ d_2 &= 3e^{-0.1(t-25)^2}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Estimirani poremećaj, kao i u prvom primjeru, ćemo provjeriti za različita pojačanja observera. Uzet ćemo u obzir samo ona pojačanja koja su se pokazala pogodnima za upravljanje. Upravljačka varijabla koju koristimo prikazana je jednadžbom (4.30) te zanemarimo član  $z_5$  koji služi za kompenzaciju poremećaja.

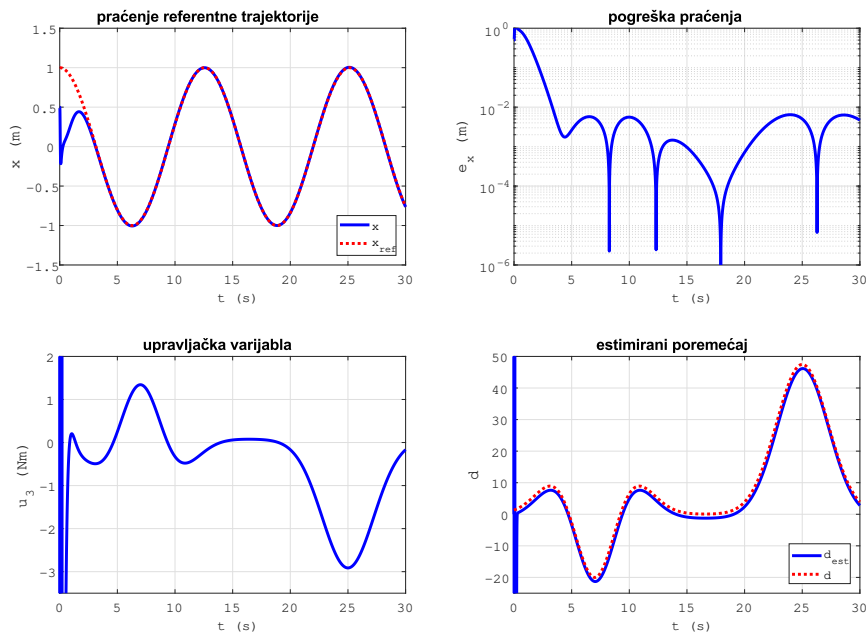


Slika 4.7: Praćenje referentne trajektorije s poremećajem bez kompenzacije poremećaja.

Na slici 4.7 vidljivo je da položaj kvadkoptera prati referencu prije i nakon poremećaja. U vremenskom periodu gdje djeluje poremećaj očekivano je odstupanje od reference. Poremećaj je estimiran za tri različita pojačanja observera. Za pojačanje dobiveno koeficijentom  $w = 10$  odstupanje estimiranog poremećaja i stvarnog poremećaja na trenutke je prevelika. Za pojačanje dobiveno koeficijentom  $w = 50$  i  $w = 100$  estimirani poremećaj je sličan, ali za  $w = 100$  estimirani poremećaj je nešto stabilniji, tako da ćemo za upravljanje koristiti  $w = 100$ .

### Primjer 3 - praćenje trajektorije s poremećajem i kompenzacijom poremećaja

U zadnjem primjeru prikazano je upravljanje  $x$ -osi kvadkoptera gdje imamo utjecaj poremećaja koji je prikazan jednačbom (4.31) te imamo kompenzaciju istoga. Kao koeficijent za pojačanje observera uzet je  $w = 100$ .

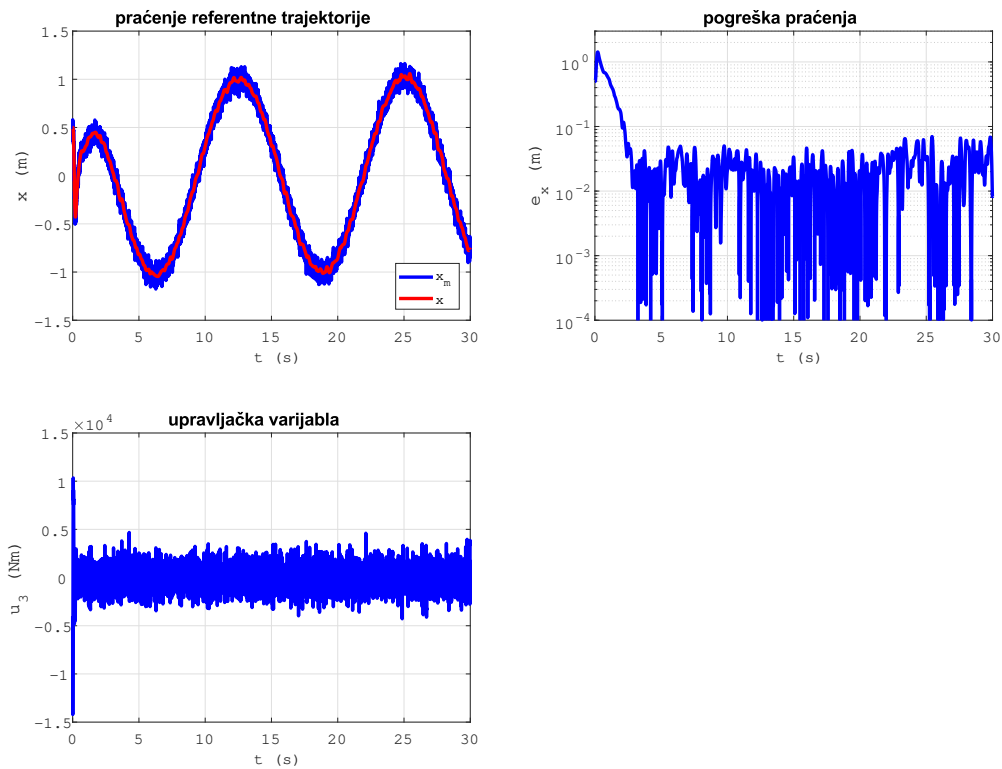


Slika 4.8: Praćenje referentne trajektorije s poremećajem i kompenzacijom poremećaja.

Na slici 4.8 je vidljivo da položaj kvadkoptera prati zadanu referencu tijekom cijelog intervala. Kada poremećaj počne djelovati, upravljačka varijabla ga poništi te nema odstupanja od referentne trajektorije.

### Primjer 4 - praćenje trajektorije s poremećajem i kompenzacijom poremećaja uz šum mjerenja

U četvrtom primjeru prikazano je upravljanje kvadkopterom sa šumom u mjerenoj varijabli  $x_m(t) = x(t) + 0.1\xi(t)$ , gdje je  $\xi(t)$  Gauss-ov šum standardne normalne distribucije  $N(0, 1)$ . Amplituda šuma je oko 10% amplitude samog mjerenog signala.

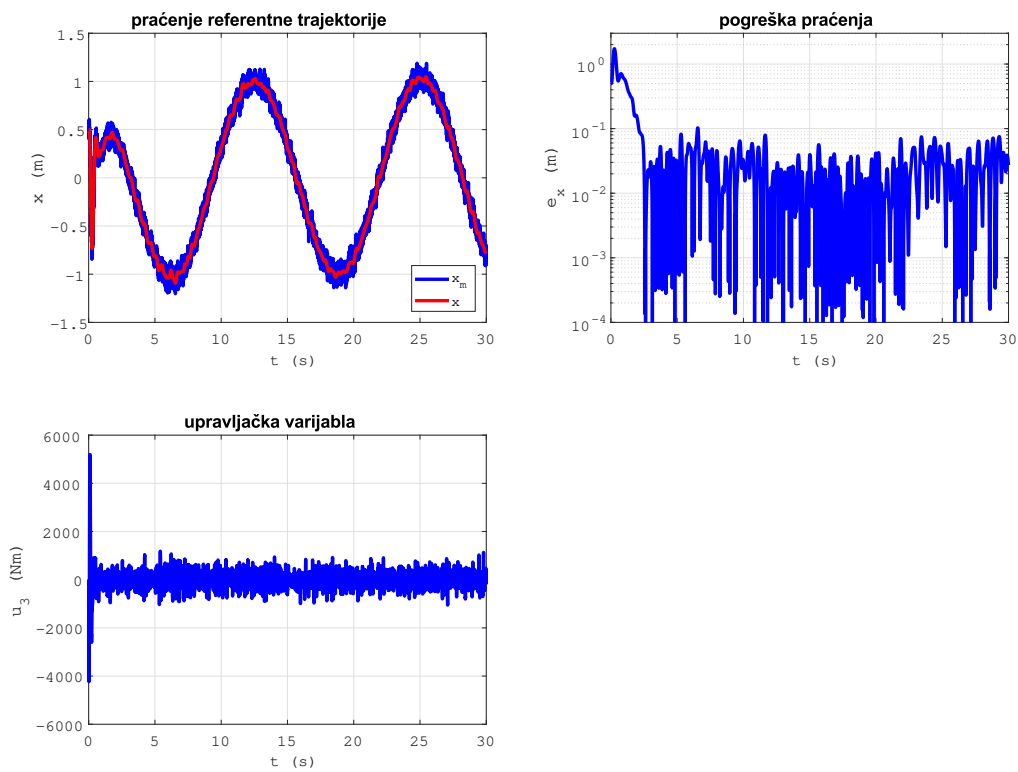


Slika 4.9: Praćenje referentne trajektorije s poremećajem i kompenzacijom poremećaja uz šum mjerenja.

Na slici 4.9 vidljivo je da položaj kvadkoptera ima oscilacija izazvanih šumom u mjerenim varijablama. Do tih oscilacija dolazi zato što se za estimaciju varijabli stanja koristi observer, koji koristi samo prvu varijablu stanja kako bi dobio ostale. Zbog šuma mjerenja dolazi do pada točnosti slijeđenja trajektorije i velikih oscilacija kod upravljačke varijable.

### Primjer 5 - praćenje trajektorije s poremećajem i kompenzacijom poremećaja uz šum mjerenja s filtriranom upravljačkom varijablom

Kako bi se smanjila amplituda oscilacija upravljačke varijable, u ovom primjeru upravljačka varijabla će se filtrirati te će se koristiti za upravljanje. Filtrirana upravljačka varijabla ima oblik  $\dot{u}_f = -K_f(u_f - u)$ , gdje je  $K_f$  pojačanje filtera,  $u_f$  filtrirana upravljačka varijabla te  $u$  upravljačka varijabla. U ovom primjeru uzeto  $K_f = 20$ .



Slika 4.10: Praćenje referentne trajektorije s poremećajem i kompenzacijom poremećaja uz šum mjerenja s filtriranom upravljačkom varijablom.

Na slici 4.10 je vidljivo da upravljačka varijabla ima manje oscilacije nego u prethodnom primjeru. Zbog filtriranja upravljačke varijable dolazi do malog pada točnosti.

### 4.3. Robusni estimator poremećaja

Kako bi upravljali ovim sustavom, promatrat ćemo dva sustava drugog reda za estimaciju poremećaja te ćemo pomoću tog estimiranog poremećaja kompenzirati isti kako bi uspješno upravljali sustavom.

#### 4.3.1. Sustavi za estimaciju poremećaja $d_2$

Uzmimo sustav drugog reda zadan jednađžbom (4.2)

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I_{YY}}u_3 + \frac{1}{I_{YY}}d_2 \quad (4.32)$$

i robusni estimator poremećaja drugog reda

$$z(s) = \frac{\lambda^2}{(s + \lambda)^2}d_2. \quad (4.33)$$

Lijevu i desnu stranu jednađžbe (4.33) pomnožimo nazivnikom te dobivamo

$$(s + \lambda)^2 z(s) = \lambda^2 d_2. \quad (4.34)$$

Provedemo inverznu Laplace-ovu transformaciju jednađžbe (4.34) te iz jednađžbe (4.32) izrazimo  $d_2$  i uvrstimo u dobivenu jednađžbu

$$\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \lambda^2 z = \lambda^2(I_{YY}\ddot{\theta} - u_3). \quad (4.35)$$

Sustav prebacimo u prostor stanja na idući način. Najprije grupiramo sve derivacije

$$\frac{d}{dt}(\dot{z} - \lambda^2 I_{YY}\dot{\theta} + 2\lambda z) = \lambda^2 z - \lambda^2 u_3, \quad (4.36)$$

time dobivamo prvu varijablu stanja

$$x_1 = \dot{z} - \lambda^2 I_{YY}\dot{\theta} + 2\lambda z. \quad (4.37)$$

Iz prve varijable stanja se grupiraju derivacije

$$\frac{d}{dt}(z - \lambda^2 I_{YY}\theta) = x_1 - 2\lambda z \quad (4.38)$$

te dobivamo drugu varijablu stanja

$$x_2 = z - \lambda^2 I_{YY} \theta, \quad (4.39)$$

iz čega slijedi da je

$$z = x_2 + \lambda^2 I_{YY} \theta. \quad (4.40)$$

Uvrštavanjem (4.40) u jednadžbe (4.36) i (4.38) dobivamo sustav koji nakon sređivanja ima oblik

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\lambda^2 x_2 - \lambda^4 I_{YY} \theta - \lambda^2 u_3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2\lambda x_2 - 2\lambda^3 I_{YY} \theta. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Taj sustav u matričnom zapisu ima oblik

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_e &= \mathbf{A}_e \mathbf{x}_e + \mathbf{B}_e \mathbf{u}_e, \\ z &= \mathbf{C}_e \mathbf{x}_e + \mathbf{D}_e \mathbf{u}_e. \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_e &= \begin{bmatrix} 0 & -\lambda^2 \\ 1 & -2\lambda \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} -I_{YY} \lambda^4 & -\lambda^2 \\ -2I_{YY} \lambda^3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{D}_e &= \begin{bmatrix} I_{YY} \lambda^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} \theta \\ u_3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

gdje su  $\mathbf{A}_e$ ,  $\mathbf{B}_e$ ,  $\mathbf{C}_e$  i  $\mathbf{D}_e$  matrice observera,  $\mathbf{x}_e$  unutarnji vektor stanja observera i  $\mathbf{u}_e$  unutarnja upravljačka varijabla observera te  $z$  izlazna varijabla observera u kojoj se nalazi estimirani poremećaj.

### 4.3.2. Sustavi za estimaciju poremećaja $d_1$

Uzmemo sustav drugog reda zadan jednadžbom (4.1)

$$\ddot{x} = g\theta + \frac{1}{m}d_1 \quad (4.43)$$

i robusni estimator poremećaja drugog reda

$$z(s) = \frac{\lambda^2}{(s + \lambda)^2} d_2. \quad (4.44)$$

Lijevu i desnu stranu jednadžbe (4.44) pomnožimo s nazivnikom te dobivamo

$$(s + \lambda)^2 z(s) = \lambda^2 d_2. \quad (4.45)$$

Provedemo inverznu Laplace-ovu transformaciju jednadžbe (4.45) te iz jednadžbe (4.43) izlučimo  $d_1$  i ubacimo u dobivenu jednadžbu

$$\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \lambda^2 z = \lambda^2(\ddot{x} - g\theta)m. \quad (4.46)$$

Sustav prebacimo u prostor stanja na idući način. Najprije grupiramo sve derivacije

$$\frac{d}{dt}(\dot{z} - \lambda^2 m \dot{x} + 2\lambda z) = \lambda^2 z - \lambda^2 m g \theta \quad (4.47)$$

i dobivamo prvu varijablu stanja

$$x_1 = \dot{z} - \lambda^2 m \dot{x} + 2\lambda z. \quad (4.48)$$

Iz prve varijable stanja grupiraju se derivacije

$$\frac{d}{dt}(z - \lambda^2 m x) = x_1 - 2\lambda z \quad (4.49)$$

i dobivamo drugu varijablu stanja

$$x_2 = z - \lambda^2 m x \quad (4.50)$$

iz koje slijedi

$$z = x_2 + \lambda^2 m x. \quad (4.51)$$

Uvrštavanjem (4.51) u jednadžbe (4.47) i (4.49) dobivamo sustav koji nakon sređivanja ima oblik

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\lambda^2 x_2 - \lambda^4 m x - \lambda^2 m g \theta, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2\lambda x_2 - 2\lambda^3 m x. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Taj sustav u matičnom zapisu ima oblik

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_e &= \mathbf{A}_e \mathbf{x}_e + \mathbf{B}_e \mathbf{u}_e, \\ z &= \mathbf{C}_e \mathbf{x}_e + \mathbf{D}_e \mathbf{u}_e, \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_e &= \begin{bmatrix} 0 & -\lambda^2 \\ 1 & -2\lambda \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} -m\lambda^4 & -mg\lambda^2 \\ -2m\lambda^3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{D}_e &= \begin{bmatrix} m\lambda^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

gdje su  $\mathbf{A}_e$ ,  $\mathbf{B}_e$ ,  $\mathbf{C}_e$  i  $\mathbf{D}_e$  matrice observera,  $\mathbf{x}_e$  unutarnji vektor stanja observera i  $\mathbf{u}_e$  unutarnja upravljačka varijabla observera te  $z$  izlazna varijabla observera u kojoj se nalazi estimirani poremećaj.

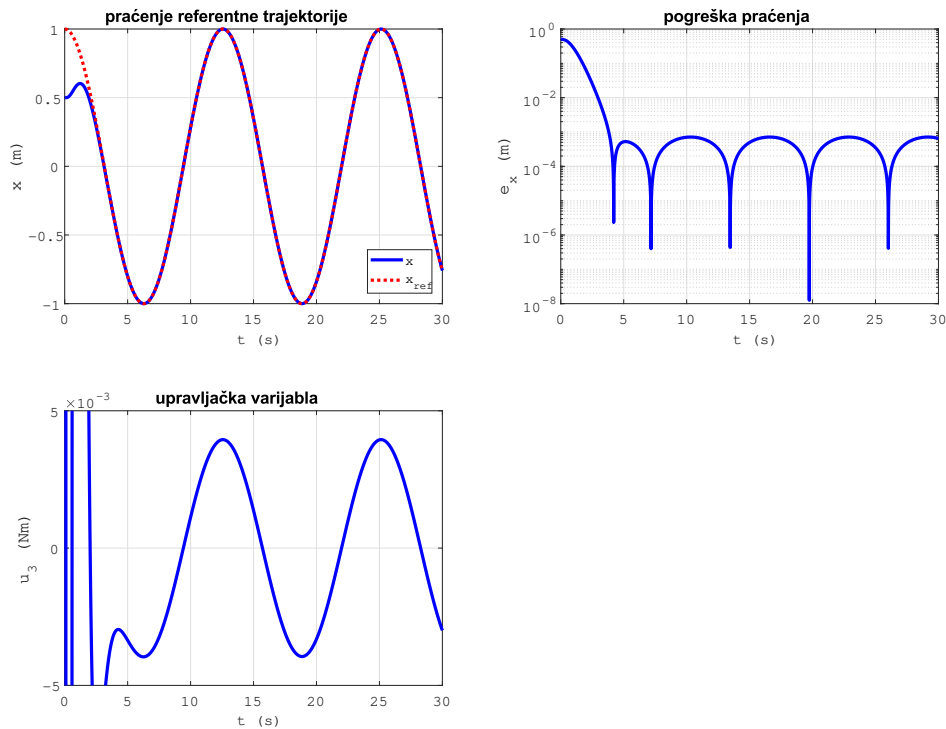


### 4.3.3. Primjeri za robusni estimator poremećaja

U ovim primjerima koristit će se sustav iz prošlog poglavlja. Korištene vrijednosti u modelu kvadkoptera su  $g = 9.81\text{m/s}^2$ ,  $I_{YY} = 0.62\text{m}^4$ ,  $m = 1\text{kg}$ . Trajektorija koju prati kvadkopter zadana je formulom  $x_d = \cos(0.5t)$  uz početni uvjet  $x_0 = 0.5\text{m}$ , a ostali početni uvjeti su jednaki nuli.

#### Primjer 1 - praćenje trajektorije bez poremećaja

U ovom primjeru vidjet ćemo prikazati kako kvadkopter radi u slučaju leta bez poremećaja ( $d = 0$ ), gdje je zadana referenca položaja  $x_d = \cos(0.5t)$ .



Slika 4.11: Praćenje referentne trajektorije bez prisustva poremećaja.

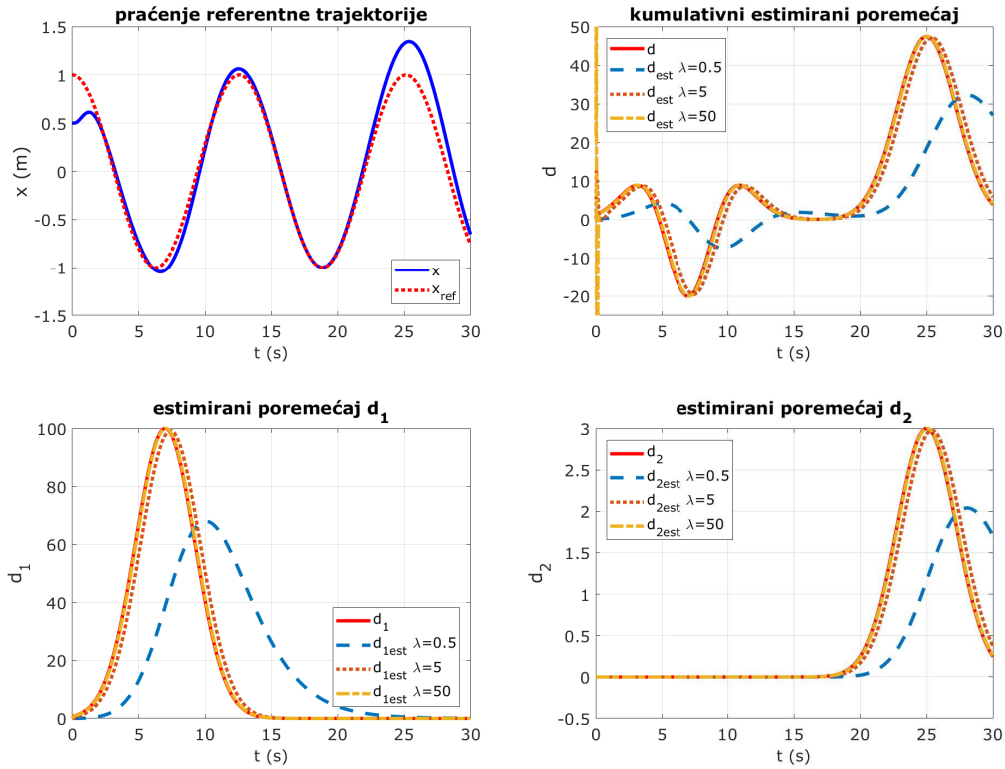
Na slici 4.11 može se primijetiti da položaj kvadkoptera uhvati referentnu trajektoriju položaja oko treće sekunde te ju nakon tog trenutka prati bez pogreške. Razlog postojanja pogreške u prve tri sekunde je nepoklapanje početnih uvjeta s referentnom trajektorijom u nultoj sekundi.

## Primjer 2 - praćenje trajektorije s poremećajem bez kompenzacije poremećaja

U drugom primjeru pokazat ćemo kako poremećaj utječe na kvadkopter u slučaju kada nemamo mehanizam za kompenzaciju poremećaja. Promatrani poremećaji bit će naleti vjetra dani Gaussovim funkcijama oblika

$$\begin{aligned} d_1 &= 100e^{-0.1(t-7)^2}, \\ d_2 &= 3e^{-0.1(t-25)^2}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Kod robusnog observera poremećaja imamo matrice observera, prikazane u jednadžbama (4.42) i (4.53), koje ovise o polu  $\lambda$ .



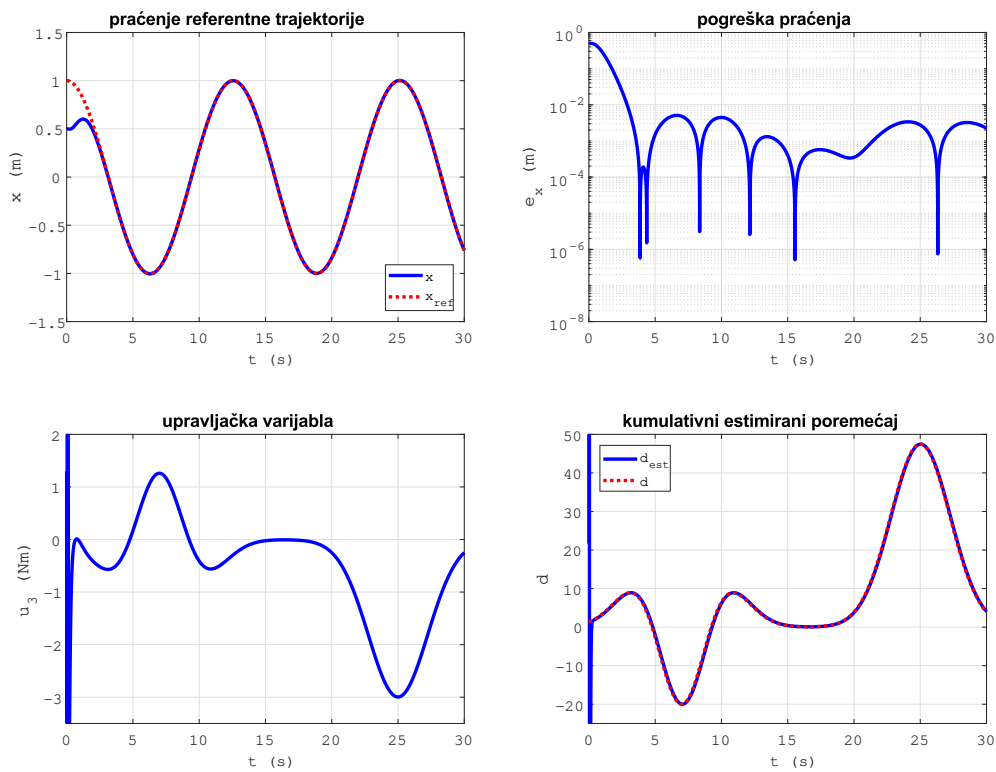
Slika 4.12: Praćenje referentne trajektorije s poremećajem bez kompenzacije poremećaja.

Na slici 4.12 je vidljivo da položaj kvadkoptera prati referencu prije i nakon poremećaja. U vremenskom periodu gdje djeluje poremećaj očekivano je odstupanje od reference. Poremećaj je estimiran za tri različita pola observera. Za pol  $\lambda = 0.5$  razlika estimiranog

poremećaja i stvarnog poremećaja je prevelika. Za pol  $\lambda = 5$  razlika estimiranog poremećaja i stvarnog poremećaja je prihvatljiva, dok za pol  $\lambda = 50$  estimirani poremećaj se poklapa sa samim poremećajem te je pogodan za kompenzaciju istoga.

### Primjer 3 - praćenje trajektorije s poremećajem i kompenzacijom poremećaja

U trećem primjeru prikazano je upravljanje kvadkopterom uz utjecaj poremećaja, prikazan jednadžbom (4.54) te imamo kompenzaciju istoga. Kao pol observera uzet je  $\lambda = 50$ .

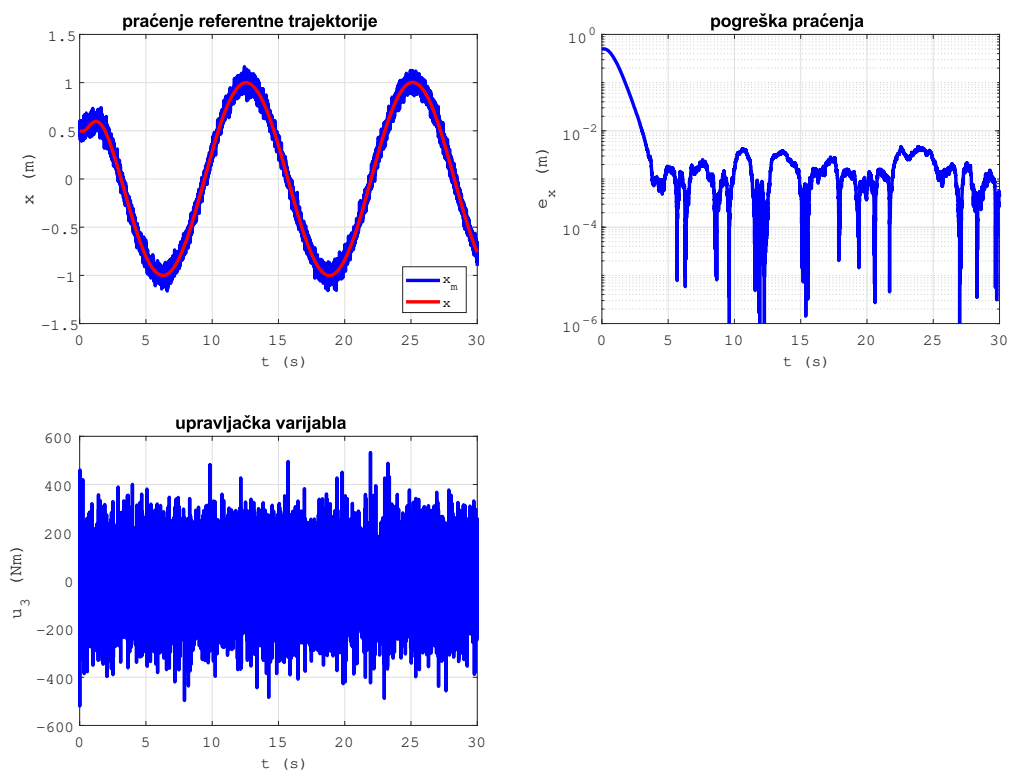


Slika 4.13: Praćenje referentne trajektorije s poremećajem i kompenzacijom poremećaja.

Na slici 4.13 vidimo da položaj kvadkoptera prati zadanu referencu tijekom cijelog intervala. Kada poremećaj počne djelovati upravljačka varijabla ga poništi te nema odstupanja od referentne trajektorije.

### Primjer 4 - praćenje trajektorije s poremećajem i kompenzacijom poremećaja uz šum mjerenja

U četvrtom primjeru prikazano je upravljanje kvadkoptom sa šumom u mjerenim varijablama  $x_m(t) = x(t) + 0.1\xi(t)$  i  $\dot{x}_m(t) = \dot{x}(t) + 0.03\xi(t)$ , gdje je  $\xi(t)$  Gauss-ov šum standardne normalne distribucije  $N(0, 1)$ . Amplituda šuma je oko 10% amplitude samog mjerenog signala.

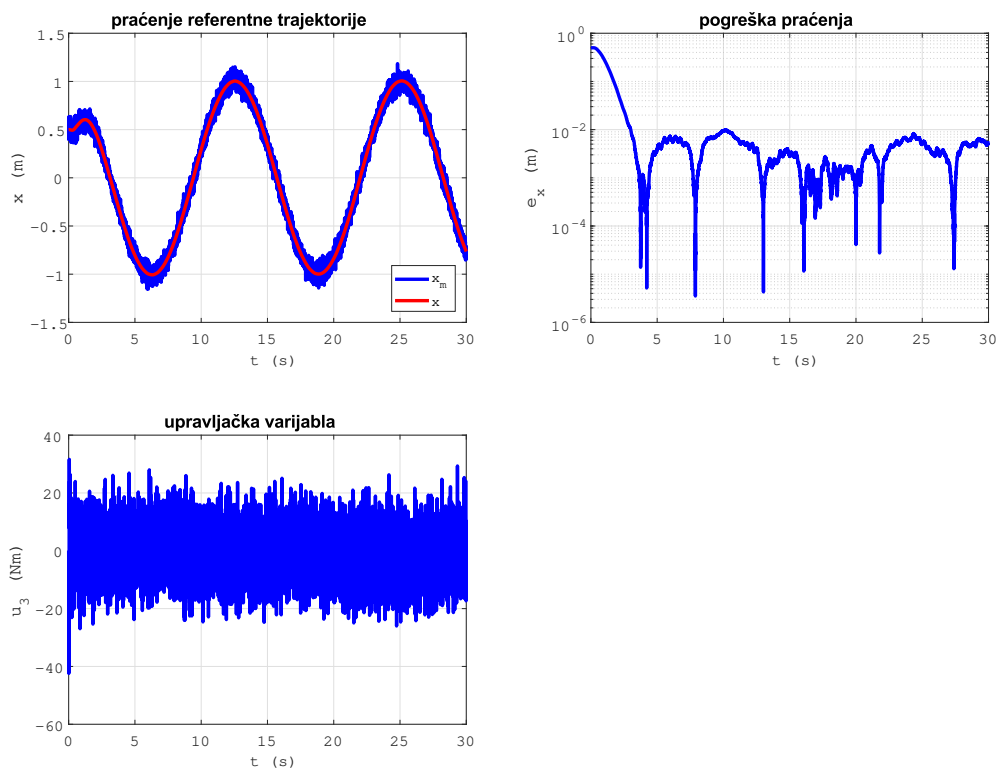


Slika 4.14: Praćenje referentne trajektorije s poremećajem i kompenzacijom poremećaja uz šum mjerenja.

Na slici 4.14 vidljivo je da položaj kvadkoptom prati zadanu referencu bez obzira na šum mjerenja koji je vidljiv na mjerenoj varijabli  $x_m$ . Zbog šuma mjerenja dolazi do pada točnosti slijeđenja trajektorije i velikih oscilacija kod upravljačke varijable.

### Primjer 5 - praćenje trajektorije s poremećajem i kompenzacijom poremećaja uz šum mjerenja s filtriranom upravljačkom varijablom

Kako bi se smanjila amplituda oscilacija upravljačke varijable, u ovom primjeru upravljačka varijabla će se filtrirati te će se koristiti za upravljanje. Filtrirana upravljačka varijabla ima oblik  $\dot{u}_f = -K_f(u_f - u)$ , gdje je  $K_f$  pojačanje filtera,  $u_f$  filtrirana upravljačka varijabla te  $u$  upravljačka varijabla. U ovom primjeru uzeto  $K_f = 20$ .

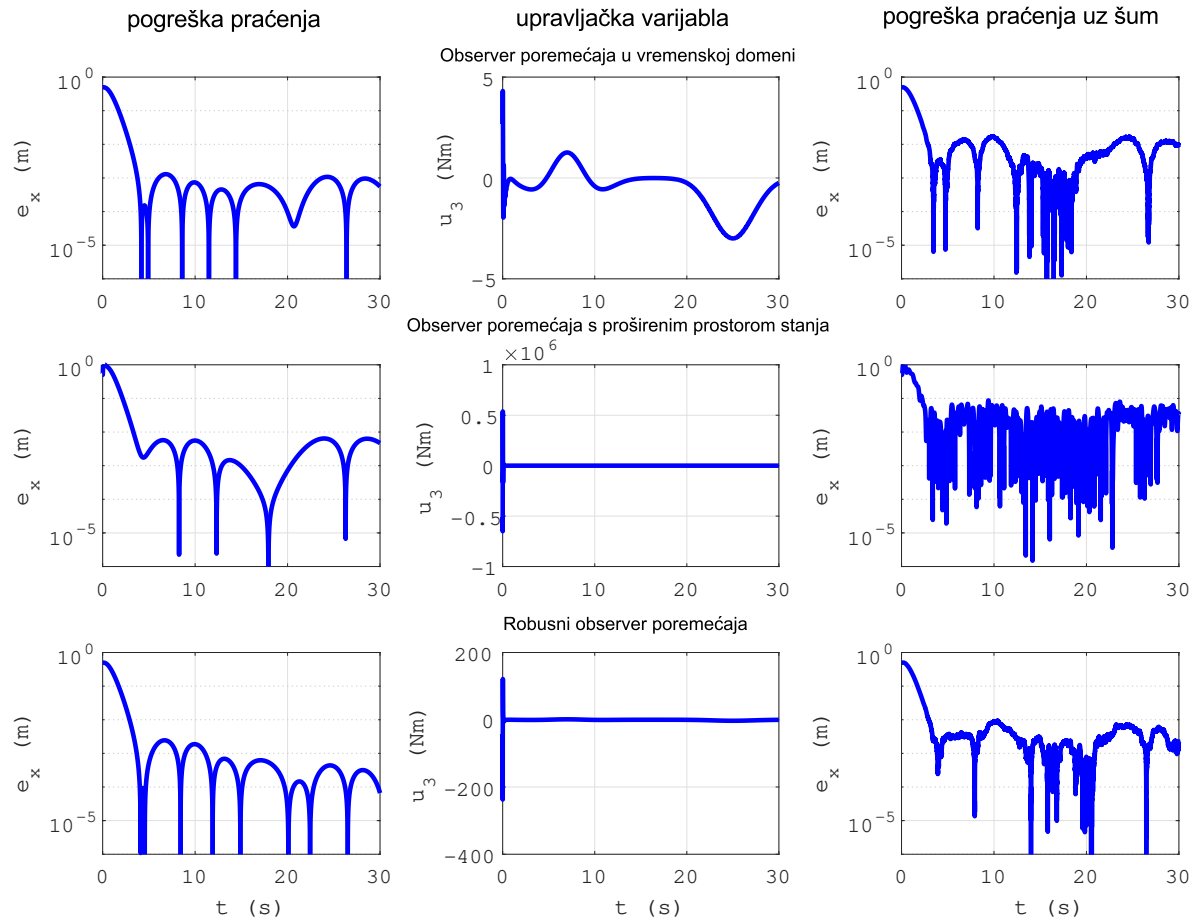


Slika 4.15: Praćenje referentne trajektorije s poremećajem i kompenzacijom poremećaja uz šum mjerenja s filtriranom upravljačkom varijablom.

Na slici 4.15 je vidljivo da upravljačka varijabla ima manje oscilacije nego u prethodnom primjeru. Zbog filtriranja upravljačke varijable dolazi do pada točnosti.

## 4.4. Komparativna analiza

Kako bi usporedili tri observera korištena u radu, usporedit ćemo njihovu pogrešku praćenja, upravljačku varijablu i pogrešku praćenja u slučaju kada imamo šum mjerenja.



Slika 4.16: Pogreške praćenja i upravljačke varijable observera stanja.

Na slici 4.16 prikazane su pogreške praćenja i upravljačke varijable triju observera obrađenih u radu. Prvi redak odnosi se na observer poremećaja u vremenskoj domeni, drugi redak na observer poremećaja s proširenim prostorom stanja te treći redak na robusni observer poremećaja.

Vidljivo je da observer poremećaja u vremenskoj domeni nema velikih oscilacija u upravljačkoj varijabli na početku rada, dok druga dva observera imaju. Najgori po tom pitanju je observer poremećaja s proširenim prostorom stanja. Nakon početnih

oscilacija upravljačke varijable su identične u slučaju bez šuma.

S obzirom na broj mjerljivih varijabli, najbolji je observer s proširenim prostorom stanja. Kod njega je jedina potrebna mjerljiva varijabla pozicija te se iz pozicije observerom estimiraju druge varijable stanja. Kod druga dva observera mjerljive su varijable pozicija i brzina, a ostale varijable se estimiraju pomoću filtera za estimaciju derivacija.

Observer s proširenim prostorom stanja ima najveću pogrešku praćenja koja je za red veličine veća nego kod druga dva observera.

Kod observera poremećaja u vremenskoj domeni i robusnog observera poremećaja moguće je estimirati zasebno svaki od poremećaja, dok se kod observera poremećaja s proširenim prostorom stanja estimira ukupni poremećaj u sustavu.

U slučaju sa šumom mjerenja dolazi do pada točnosti kao i do vidljivo oscilatornog odziva. Najveće oscilacije vidljive su kod observera s proširenim prostorom stanja.

## 5 | Zaključak

U ovom radu razmatrani su observer poremećaja u vremenskoj domeni, observer poremećaja s proširenim prostorom stanja i robusni observer poremećaja koji su izvedeni i prikazani na jednostavnim primjerima. Izveden je i dinamički model kvadkoptera te je korištena samo  $x$ -os za koju je provedena sinteza regulatora. Kako bi upravljanje kvadkopterom u slučaju s poremećajem bilo moguće, implementiran je svaki od observera poremećaja. Observeri poremećaja estimiraju poremećaj te se on kompenzira putem upravljačke varijable. Kod observera poremećaja u vremenskoj domeni i robusnog observera poremećaja svaki od poremećaja je moguće zasebno estimirati, dok se kod observera poremećaja s proširenim prostorom stanja može estimirati samo ukupni poremećaj. Iz prikazanih primjera vidljivo je da u slučaju bez šuma u mjerenom signalu sva tri observera dobro prate referentnu trajektoriju bez obzira na prisutnost poremećaja. U slučaju sa šumom mjerenja dolazi do velikih oscilacija upravljačke varijable i pada točnosti. Iako imamo oscilacije u upravljačkoj varijabli praćenje referentne trajektorije je poprilično dobro, jer sama dinamika sustava predstavlja filter za te visokofrekventne oscilacije upravljačke varijable. Do oscilacija u upravljačkoj varijabli dolazi zbog filtera za estimaciju derivacija, koji se koristi za estimiranje treće i četvrte varijable stanja, koje nisu mjerljive. Filter za estimaciju derivacija korišten za dobivanje estimiranih varijabli stanja naziva se "Dirty derivative filter" kao najjednostavniji filter, a time i najlošiji. Iako su dobiveni rezultati zadovoljavajući, moguće je dobiti i bolje rezultate u slučaju da se koriste bolji filteri za estimaciju derivacija.



# Literatura

- [1] Josip Kasać, Branko Novaković, Dubravko Majetić, and Danko Brezak. Passive finite dimensional repetitive control of robot manipulators. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 16(3):570–576, 2008.
- [2] Josip Kasać, Branko Novaković, and Vladimir Milić. On equivalence between internal and external model-based repetitive learning controllers for nonlinear passive systems. *Asian Journal of Control*, 13(1):15–24, 2011.
- [3] Josip Kasać, Branko Novaković, Dubravko Majetić, and Danko Brezak. Finite dimensional internal model-based repetitive control of nonlinear passive systems. 15th Mediterranean Conference on Control and Automation, Atena, Grčka, 2007.
- [4] Denis Kotarski, Petar Piljek, Hrvoje Brezak, and Josip Kasać. Chattering free tracking control of a fully actuated multirotor with passively tilted rotors. *Transactions of Famena*, 42(1):1–14, 2018.
- [5] Josip Kasać, Tihomir Žilić, Vladimir Milić, Andrej Jokić, and Mihael Lobrović. Robust decentralized global asymptotic tracking control of a class of nonlinear mechanical systems. American Control Conference, pages 4731–4736, Boston, SAD, 2016.
- [6] Josip Kasać, Stojan Stevanović, Tihomir Žilić, and Josip Stepanić. Robust output tracking control of a quadrotor in the presence of external disturbances. *Transactions of Famena*, 37(4):29–42, 2013.

- [7] S. Li, J. Yang, W. Chen, and X. Chen. *Disturbance Observer-Based Control: Methods and Application*. Taylor & Francis Group, LLC, 2014.
- [8] Jun Yang, Wen-Hua Chen, and Shihua Li. Autopilot design of bank-to-turn missile using statespace disturbance observers. UKACC International Conference on Control 2010, pages 1218–1223, Coventry, UK, 2010.
- [9] Josip Kasać, Dubravko Majetić, and Danko Brezak. *Zbirka zadataka iz teorije automatskog upravljanja - Viševarijabilni sustavi*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2016.
- [10] Tommaso Bresciani. Modelling, identification and control of a quadrotor helicopter. Master's thesis, Department of Automatic Control, Lund University, 2008.
- [11] Tristan Perez. *Ship Motion Control Course Keeping and Roll Stabilisation Using Rudder and Fins*. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [12] Josip Kasać, Dubravko Majetić, and Danko Brezak. An algebraic approach to on-line signal denoising and derivatives estimation. *Journal of the Franklin Institute*, 355(15):7799–7825, 2018.
- [13] Xingjian Wang, Rui Liao, Cue Shi, and Shaoping Wang. Linear extended state observer-based motion synchronization control for hybrid actuation system of more electric aircraft. *Sensors*, 17(11):2444–2460, 2017.

# A | Prilog

1. CD-R disc